安田女子大学紀要　50，277-282　2022.

組市松模様のヴァリエーションの展開

水　谷　昌　義

On the Development of a Variation in Harmonized Chequered Tessellation

Masayoshi MIZUTANI

安田女子大学現代ビジネス学部現代ビジネス学科

要　　旨

2016年４月25日、東京2020オリンピック・パラリンピック競技大会のエンブレムが決定し発表された。「組市松紋」と名付けられた、３種類の長方形を組み合わせたデザインである。そのシンプルに見えて斬新なデザインはすぐさま、市井の美術家や数学愛好家によって分析解読が始められ、ネット上で様々な結果報告が続いた。のちには作者自身による仕組みの解説も公表されたが、エンブレムの考察はその後も続いた。

本稿では、作者公表の作成方法に則り、四角形の種類の増減を試み、デザインの元となる基本図形の構成法と法則性について論ずる。そして、パラリンピックエンブレムの構造を完全に明らかにすることができた。

キーワード： 菱形充填、組市松、市松模様、エンブレム

1. は じ め に

2016年４月25日、東京2020オリンピック・パラリンピック競技大会のエンブレムが決定し発表された。「組市松紋」と名付けられた、３種類の長方形を組み合わせたデザインで、野老（ところ）朝雄氏による作品である（文献８）。昔からある市松模様を応用した精緻で粋なデザインはすぐさま、美術家や数学愛好家によってデザインの分析解読が始まり、ネット上で様々な結果報告が続いた（文献７に時系列で記録されている）。そして、発表からわずか３日後の４月28日には長谷川（文献９）によって初めてからくりが看破され、2018年には作者自身による仕組みの解説が文献２で公表された。エンブレムの考察はその後も続いているが、そのほとんどは作品を採寸測定しただけのもので、並び方の法則を見つけ独自のデザインを新たに作成できるようなものは皆無である。これらいろいろな報告は事前調査不足で、すでに仕組みが明らかになっていることを知らないシロウトの学術外報告ということになる。

本稿では「組市松紋」の作成方法に則り、四角形の種類の増減と基本的図形の作成の法則性について論ずる。

2. 「組市松紋」の構成要素

藍色に彩色された四角形は長方形であるが、その頂点を辺の中点とするような３種類の菱形が構成要素となる。図１に示す、鋭角が30度の菱形、60度の菱形、正方形で、辺の長さは３個とも等しく描いてある。辺の中点を結ぶ線分は交差しないほうの対角線に平行で、対辺も平行、菱形の対角線は垂直に交差するので交差する線分も垂直となり、長方形ができる。これらの菱形を、辺と両端を共用するように隙間なく並べ、中点を結ぶ長方

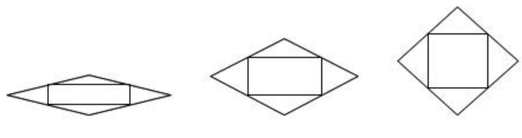


図１　「組市松紋」を構成する３種類の菱形

表１　菱形の各種寸法

90°以下の角	名称	対角線の長さ		対辺との距離
θ	θ菱形	$2\cos\frac{\theta}{2}$	$2\sin\frac{\theta}{2}$	$\sin\theta$
30°	30°菱形	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=1.93\cdots$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=0.517\cdots$	0.5
60°	60°菱形	$\sqrt{3}=1.73\cdots$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866\cdots$
90°	90°菱形(正方形)	$\sqrt{2}=1.41\cdots$		1

形を彩色すれば組市松の模様ができる。それの芸術性と完成度を極めたものが「組市松紋」エンブレムである。

各菱形の辺の長さを１とし、諸元をまとめると、上掲の表１のようになる。対角線の長さの$\frac{1}{2}$倍が長方形の辺の長さになる（$\cos\frac{\theta}{2}$と$\sin\frac{\theta}{2}$、$\theta<90$ならば$\cos\frac{\theta}{2}>\sin\frac{\theta}{2}$)。したがって、$\theta$の大きさに関わらず、長方形の対角線の長さは１になる。

これらの菱形を平面に隙間なく並べるわけであるから、内部の任意の頂点においてそこに集まる３～12個の菱形の頂点の角度の合計は360度になる必要がある。その並べ方は、文献２では180通りと記述されているが、筆者の検討では220通りが正しい。これは重複を許した円環順列となるので、すべてのパターンの数え挙げはかなり難しい。デザインした当事者でも間違うほどである。また、頂点ごとの角度合計が360度にさえなれば、平面を敷き詰められるというわけではなく、現実的には試行錯誤を繰り返して、面の重なりが出ないようにする作業が必須である。

たとえば、パラリンピックのエンブレムは図２左のように45個の菱形が並べられている。上部の空間は、オリンピックエンブレムの中心の空間と合同の、辺の長さ１の正12角形で、図２右のように、下部にある正12角形とも合同である。空間部分を補えば、全体の外形が辺の長さ２の正12角形になり、これはオリンピックエンブレムの外形と合同になる。正12角形の内角の大きさは150度で、30度菱形の鈍角と等しいので、30度菱形が外周に沿って配置されているのがよくわかる。他にも90度と60度の合計などで150度は作りやすいので、正12角形にまとめていくのは自然な流れであろう。エンブレムが発表された当初はネット上で24角形などとも言われたが、正24角形になっていない（オリンピックエンブレムの凸包は、辺の長さ１と0.966が交互に現れる24角形である）ことを見落としている発言である。

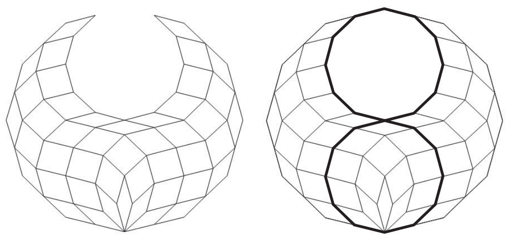


図２　パラリンピックエンブレムの菱形分割

3.　菱形ヴァリエーションの拡張

これまでは、30度・60度・90度の３種類の菱形を使って考察してきた。30度は90度の三分の一であるので、この分割数を３以外に変えれば、別の菱形群が構成されることになる。すなわち、$\theta=90°\div n$（n=2,3,4,…)を最小角とし、そのm倍（m=1,2,3,…,n)の角を持つ菱形群を考える。θ菱形の鈍角は$180°-\frac{360}{4n}$となるから、正4n角形の内角に等しくなる。30度菱形を基準に正12角形を構成したのと同様に、θ菱形を基準に正4n角形が構成できる期待がもてる。

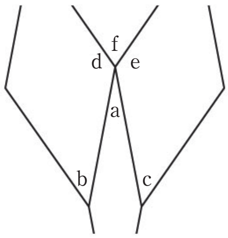
定義１

$\theta=90°\div n$（n=2,3,4,…)とし、m=1,2,3,…,n に対してそれを角に持ち、辺の長さが１の mθ菱形を考える。特定のｎにおいて、mθ菱形の何種類かを、お互いに辺と頂点を共有するように有限も

しくは無限の平面に隙間なくかつ重なりなく並べた図を充填図という。

エンブレムの菱形群は$n=3$の場合に相当することになる。図２右の下部の12角形は充填図である。定義から容易に、この充填図の最長の対角線の長さは、30度菱形の長いほうの対角線の長さの２倍に等しくなることが分かる。

補助定理１
$a=p\theta$, $b=c=(p+1)\theta$ の菱形が辺と頂点を共有して隣接しているとき、$f=(p+2)\theta$ である。
証明：
$d=e=(2n-p-1)\theta$ であるから、$f=4n\theta-(a+d+e)=(p+2)\theta$ となる。



手順１（基本正4n角形充填図の構成法）

Step1.　$2n-1$個のθ菱形を、鋭角θを１点に集め、辺を隣接させて放射状に配置する。

Step2.　隣接している辺の鈍角側に開いた角は、$p=0$とおいた補助定理１により、2θとなる。そこに$2n-2$個の2θ菱形を配置する。

Step3.　補助定理１に従い、Step2で間に3θの角ができ、そこに、3θ菱形を配置し、順次これを繰り返す。

Step4.　最初から数えて$2n-1$回目にはθ菱形ひとつの鈍角を配置して基本正4n角形充填図が完成する。

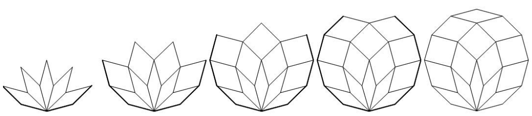


図３　基本正12角形充填図の構成過程

Step1で最初にθ菱形の鋭角を集めた一点を、基点と称す。また、この手順で組みあがる、辺の長さ１の正4n角形の枠にちょうど収めた充填図を基本正4n角形充填図ということとする。

手順１ではｎが特定の数であることを用いていないので、任意のｎについて構成が可能である。Step1.では下側に正4n角形の内角と等しい$(n-1)\theta$の角ができ、基本正4n角形充填図の下部４辺が構成される（便宜上、基点のある側を下側と称するが、実際にはどの向きからでも関係ない）。Step2.では左右両端に配置した菱形により、θ菱形の鋭角と、2θ菱形の（$n-2)\theta$の角とで正4n角形の内角と等しい（$n-1)\theta$の角ができ、正4n角形がさらに２辺構成される。Step3.以降繰り返すごとに菱形を配置する個数は１個ずつ減り、正4n角形が２辺ずつ組みあがっていく。

手順１は正4n角形への充填図のひとつを構築するやり方で、正4n角形を充填する方法に唯一性はなく、何種類もの並べ方がある場合も多い。例えば、正12角形の充填であれば、手順１によるもの以外にも図４のような並べ方をすぐに作ることができる。

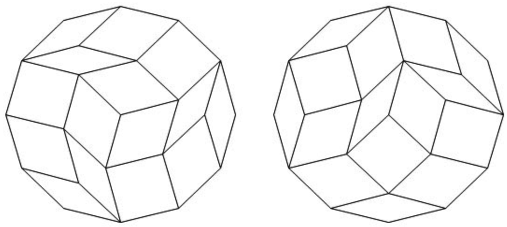


図４　手順１以外の並べ方をした正12角形の充填図の例

基本正4n角形充填図は、基点から放射状に菱形が配置されているので、その点を中心として全体をθだけ回転させても重複する部分は全く同じ図形となる。このθずつの回転を4n回繰り返すと、辺の長さ２の正4n角形ができる。

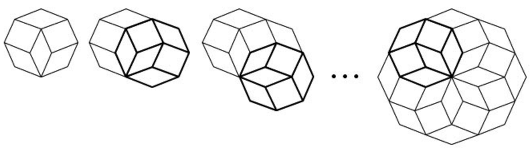


図５　基本正８角形充填図を右に45度ずつ回転する様子

手順１のStep.1では最初に基点の周りに$2n-1$個のθ菱形を配置するが、4n個のθ菱形を丸く配置して手順１と同様に進めていくことでも、基本正4n角形充填図を360度回転してできた、辺の長さ２の正4n角形を作ることができる。

4．パラリンピックエンブレムの分析

基本正12角形充填図を30度ずつ回転して１周させたものが図６である。

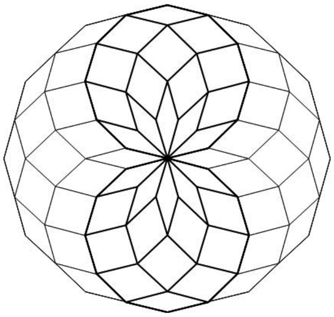


図６　手順１による基本正12角形充填図の30度回転

図６と図２左は空間部分の有無の違いはあるが、酷似している。実際、図６の最初の基本正12角形充填図を削除し、下部の基本正12角形充填図を180度回転させれば、同一の図となる。すなわち、これがパラリンピックエンブレムの構造である。任意の $n \geqq 2$ について、基本正4n角形充填図をつくり、基点を中心としてそれをθずつ回転することを4n回繰り返したのち、最初の基本正4n角形充填図を削除し、180度対向した真下の基本正4n角形充填図を180度回転すれば作れる。たとえば、n=4としてこの方法で作成すると図７のようにできる。

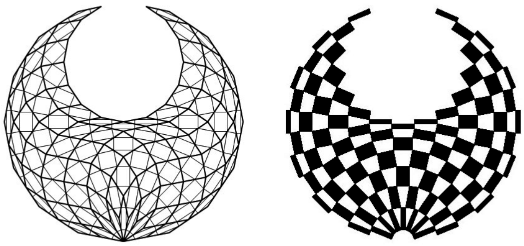


図７　n=4で作成した
パラリンピックエンブレム風の組市松模様

5．お　わ　り　に

本稿では、組市松模様の仕組みを分析し、３種類の菱形の充填図を利用しているという、公開されている事実から、新たなヴァリエーションの展開を試みた。また、基本正4n角形の構成法を提案したことにより、それを回転等することにより、パラリンピックエンブレムの構造を明らかにすることができた。

一方、オリンピックエンブレムはそう容易ではない。全体が120度ずつ部分の３周期繰り返しでできているが、それ以外の簡単な規則性はない。空間部分に図４左のような３周期繰り返しの充填図を嵌め込めば、辺の長さ２の正12角形充填図に一応はできるし、基本正12角形充填図の一部分が含まれていることも観察できる。しかし、そこからの処理がデザイン者の才能と腕であり、単純な分析で敵うものではない。理論と分析に加え、思考と発想を繰り返した芸術家のなせる業であると言えよう。

今回本稿では、辺の長さが１の菱形で、角度の異なる数種類のものを並べることだけに限ったが、「凸多角形を辺と両端の頂点を合わせて、面が重なることがないように並べた充填図」でも、多角形の辺の中点を順に結んで作った多角形を着色することで、組市松の模様を構成することができる。例えば、球面の一部に見えるような図８も、実際は平面に凸四角形を並べた図であるには違いがないので、組市松模様に変換することができる。

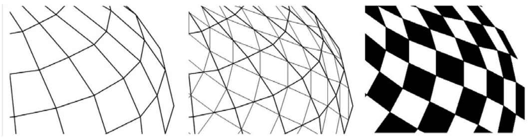


図８　球面状図版から作成した組市松模様

文献４にはこれよりも美麗な作例がたくさん収録されている。

このように、組市松の模様は数多くの種類があり、オリンピックパラリンピックエンブレムである組市松紋はその多くの模様の中のひとつの作例である。本稿では、その一部分を拡張してみたに過ぎない。さらに検証・拡張することにより、より豊かな表現が生まれる可能性がある、今後の研究課題としたい。

参　考　文　献

1．舘知宏, 野老朝雄, 堀山貴史, 個と群―アート・サイエンス協働教育―, 電気通信学会誌, 2020, Vol.103, No.6, pp.586-590.
2．野老朝雄, 荒木義明, 組市松模様の折り紙への展開, 折紙探偵団マガジン, 2018, No.169, pp.13-15.
3．美の図学編集委員会, 美の図学, 1998, 森北出版.
4．C.H.Peng, C.Jiang, P.Wonka, H.Pottmann, Checkerboard Patterns with Black Rectangles, ACM Trans.Graph, 2019, Vol.38, No.6, Article171.
5．ana, オリンピックエンブレムの書き方, 2016, plaza.rakuten.co.jp/xatnep/diary/20160501. (2021. 8. 25閲覧)
6．あそびとくらすラボ, 小学生でもわかる東京オリンピックエンブレムの秘密, 2016, YouTube. (2021. 8. 25閲覧)
7．デザイン芸人, デザインの幾何学的観察, 2016-2020, www.poc39.com/archives/4701. (2021. 8. 25閲覧)
8．東京2020組織委員会, 東京2020エンブレム, 2016, olympics.com/tokyo-2020/ja/games/emblem/. (2021. 8. 25閲覧)
9．長谷川能三, @hasegawa_nozoツイート, 2016. 4.28 am 8:33. (文献7所収)
10. Huffpost Newsroom, 新エンブレムに隠された法則とは？, 2016, www.huffingtonpost.jp/2016/04/26. (2021. 8. 25閲覧)
11. Takuma, 小学生でもできる！東京2020のエンブレムのつくりかた, 2020, note.com/takuma_0726. (2021. 8. 25閲覧)

〔2021.　9.　16　受理〕

コントリビューター：清野　聡　教授
（現代ビジネス学科）