安田女子大学紀要　49，159-168　2021.

単位当たりの量に関する問題の長方形の面積を利用した解法についての研究

水　谷　昌　義

On a Method of Solving the Problem of Quantity per Unit through Using Rectangular Area

Masayoshi MIZUTANI

現代ビジネス学科，現代ビジネス学部，
安田女子大学

要　　旨

理科系の学問は、初めに習ったことから次々に積み重ね会を繰り返していく。積み重ねの途中で理解できていないことがあると、その時点で進歩が停滞する。多くの学生は、特に算数や数学の解法について、そのやり方を習っただけで意味は理解していないことが多い。まさに教育の不備であり、学力低下とは別の問題である。もちろん、習ったことの意味を理解するかどうかは当人の学習にかかっているのだが、テストでは意味の理解が要求されず、やり方の迅速な適用のみが試されていることが大きな課題である。

本稿では、算数難問といわれるいくつかの問題に対して、ある共通の発想を導入することにより、それらの問題の同質性が明らかとなることを示す。そして、解き方を覚えるだけの学習から脱却できる可能性について論ずる。

キーワード：鶴亀算、仕事算、ニュートン算、長方形面積、天秤

1．本稿の目的

本稿は学力低下論争を蒸し返したり、それに意見を述べたり解説したりする目的のものではない。

1999年に『分数ができない大学生』(参考文献３)が上梓されて以来、その書名の妙と衝撃性が、世の中への強いアピールとなり、いわゆる学力低下論争が数年にわたり教育界のみならず広範な論者を巻き込んで展開されていった。とくに、新聞社を筆頭とするマスコミ界が、文教政策批判への好適な一材料として、検証などをほとんどすることなく挙って取り上げたことが、教育問題に本来関心のない一般へも訴えかけることになったものと本稿の筆者は考える。

使う必要性を感じず、使う機会もなかったものを急にテストすれば、計算ミス等は起こって当然のことであり、単にペーパーテストの解答が不正解であったことだけを捉えて「分数ができな

い」と結論付けるのは聊か極論であろう。同じテストを大人にも行ったとすれば、大学生以上に惨憺たる結果になったであろう。前掲書をさっとでも読めば、単にそういう事実だけを殊更に強調している内容ではないと分かるはずであるが、その内容が充分理解されることはなく、書名だけが独り歩きをしてしまったのは事実であろう。

確かに大学生のなかには分数どころか掛け算九九すら覚束ない者がごく少数含まれているが、簡単な検証を行えば、大部分の者は分数の計算問題は解けることが分かるはずである。もちろん、小学校で計算の仕方を習っただけで、計算方法の意味を理解することなく、またその後も使う機会を皆無に過ごしてきた者が大部分であるが故、計算ミスや勘違いは多く発生するが、一度注意をすれば思い出し、正しく計算をできる場合がほとんどである。

ここでの課題は、計算のやり方を習っただけで、その意味を理解していないことにある。まさに教育の不備であり、それをもって学力低下として学生を責めるのは筋違いである。もちろん、習ったことの意味を理解するかどうかは当人の学習にかかっているのだが、テストでは意味の理解は要求されず、やり方の適用のみが試されて終わってしまうことこそ大きな問題である。

距離と時間、速さを扱う問題において、Fig.1のような図を描くものが少なからず存在する。これは、やり方だけを伝える典型的なもので、「求めるものを指で隠して、残ったものを乗除すれば答えが出せる」という使い方をする。求めるものが単純であればそれでも出せるが、少しでもひねった問題では、は・じ・きのどれにどれが該当するのかすぐにわからなくなってしまい、おかしな計算で誤魔化すことになるのである。意味を考えずに、単語の当て嵌めだけを行っている証拠であろう。参考文献５にも同様な図が掲載されている。この書籍の解説は学習塾が行っていると奥付にある。すなわち、学習塾の教え方はこれなのである。学校のテスト、もしくは入学試験の問題をいかに素早くこなすかの条件反射訓練に力点が置かれていることが推察できる。この図を用いることの問題点は参考文献11でも指摘されている。

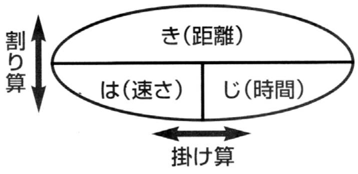


Fig.1　は・じ・き(参考文献６)より

2.　長方形の面積で考える

速さは、単位時間あたりに進む距離であり、それに継続時間を乗ずることにより、進んだ距離が求められるわけである。すなわち、長方形の縦横を速さと時間にあてはめれば、その面積が距離に相当することになる。本稿では、長方形の横軸方向に効率や貢献度(何々当たりの量)を、縦軸方向にその継続や積み重ね(時間や乗数)を配置して計算を考える方法を提案する。決まった方向に速さや進捗などを常に配置することから、速度の問題以外にも応用が利くことが期待される。

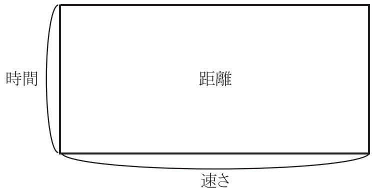


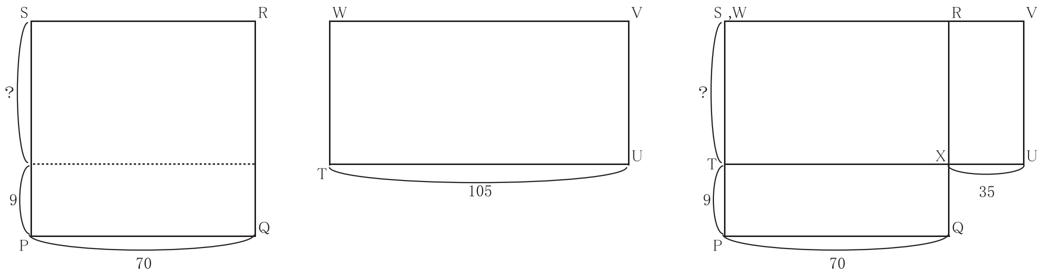
Fig.2　速さと時間、距離の関係

（例題１）旅人算(参考文献５ p.78)

A君が駅から分速70mで学校に向かっていた。A君が出発した９分後に同じ道をB君が分速105mで追いかけた。B君がA君に追いつくのはB君が出発してから何分後か。

（解）

A君、B君の動きを長方形で表す。B君は同じ道を通って追いついたのだから、PQRSとTUVWの面積が等しくなる。両者を左上の角を合わせて重ねて書けば、右の図のようになり、XU＝35、PQXT＝XUVRがわかる。PQXTの幅はXUVRの２倍だから、高さは後者が前者の２倍、つまり18分。（解答終）



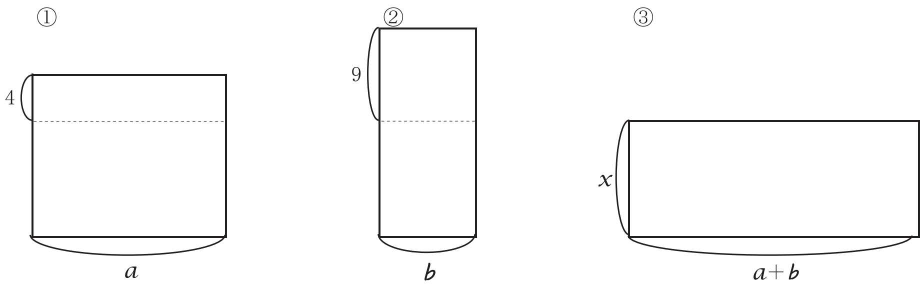
こうして解けば、B君が出発した時点でA君は何メートル先に行っているかなどを計算しなくても答えが出る。仕組みを理解することで、計算も少なくできるのである。

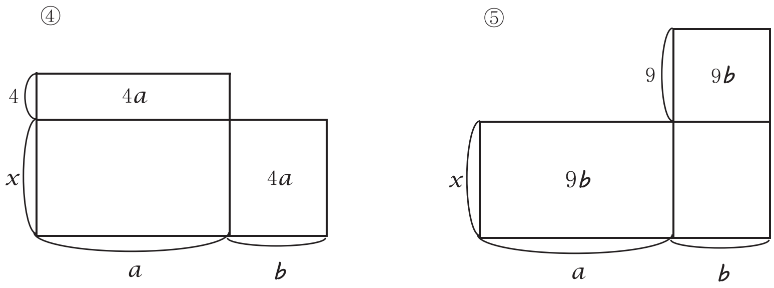
（例題２） 仕事算

ある仕事をAさん１人ですると、A，Bの２人でするよりも４日多くかかり、Bさんが１人ですると２人の時よりも９日多くかかる。２人ですると何日で終わるか。

仕事算では、「全体の仕事量を１とする」ような指示が多い。こうすると、それ以降の計算が常に分数となり、繁分数（分子や分母に分数が含まれる分数）もしばしば現れ、計算間違いの元となる。仕事の全体量はいくつに設定してもよいのだから、１日にこなす仕事量を分かりやすい数に設定すべきである。ここでは、AさんBさんがそれぞれ１日にこなす仕事量をa，bとし、２人で仕事を終えるのにかかる日数をxとする。

（解）





題意に従い、長方形の図①〜③を用意した、全仕事量を表すことになるので、どの長方形も面積は等しい。①と③・②と③を左下・右下の角を重ねて書けば④⑤の図を得、重なった共通部分からはみ出した長方形の面積が一致する。上部にはみ出した部分は縦・横の長さが分かっているので面積が確定する。

左右にはみ出した部分は未知数xを含むが、④からbx=4a、⑤からax＝9bが分かり、辺々を乗ずればabx^2＝4×9×abを得て、x^2＝4×9＝36からx＝6が容易にわかる。（解答終）

難問とされているこのタイプの仕事算はこのように整理すれば、実はあっという間に解けるサービス問題だったのである。

（例題３）　鶴亀算

鶴と亀があわせて20匹いる。足の数が合計64本のとき、亀は何匹いるか。

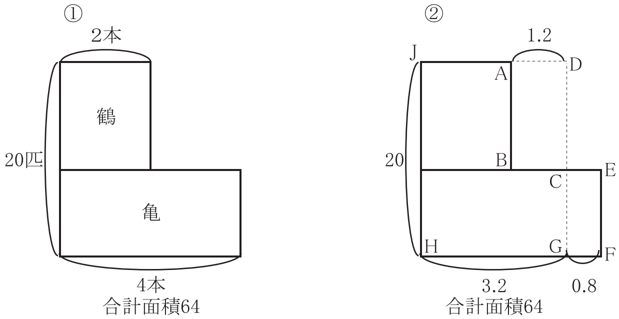
算数難問として有名な鶴亀算も、１匹あたりの足の数を横軸に、匹数を縦軸にとれば同じような図で解ける。鶴亀算の一般的な解き方でも、最初の図は縦横が違うだけで基本的に同じ図を使っている。そして、20匹すべてが鶴（または亀）だったとした場合との足の数の過不足を鶴亀の足の数の差で除して匹数を計算している。

（解）

64÷20=3.2により、足の数の平均を計算する。一般的な解き方と同じようなL字型の図①に、

この平均値の幅で高さ20の長方形JHGDを書き足す②。JHGDの面積も64なので、L字型からはみ出した部分ABCDと、L字型のほうがはみ出している部分CGFEの面積は等しくなる。はみだし幅は1.2：0.8＝3：2なのでAB：EF=2：3、すなわちEF=12と分かる。（解答終）

小学生、とくに中学受験生が、鶴亀算で足の平均値を出したりしたら、学習塾では怒られるか呆れられるかであろう。しかし、ここで紹介した方式を使うとあとで述べる濃度や天秤の計算と同じように扱うことができるのである。

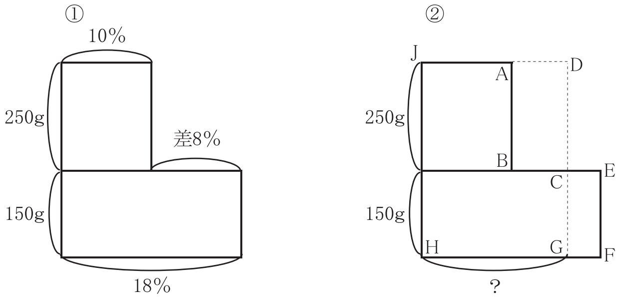


（例題４）　濃度算

濃度10％の食塩水250gと、18％の食塩水150gを混ぜると、何％になるか。

パーセント濃度は、単位量当たりの食塩水にどれだけの食塩が含まれているのかを表している。したがって、濃度を横軸に、食塩水の質量を縦軸に図を描くと、面積は食塩の質量となる。

（解）



２種類の食塩水を表す長方形を重ねたL字型の図①に、混ぜた後の食塩水の長方形JHGDを書き足す②。混ぜた後の濃度は、必ず濃いほうと薄いほうの間になる。食塩はどこにも消えていないので、JHGDの面積は、①のL字型の面積と等しい。したがって、L字型からはみ出した部分ABCDと、L字型のほうがはみ出している部分CGFEの面積は等しくなる。２つの長方形の高さの比が250：150＝5：3なのでAD：GF=3：5、すなわちAD=3と分かるので、13％。（解答終）

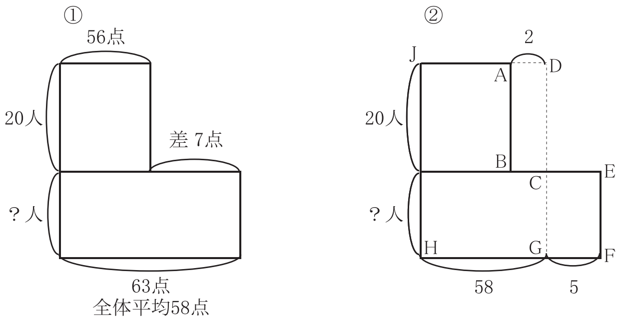
多くの解説本では食塩の量を出すようになっているが、そういう余計なものは計算しないのがコツである。

（例題５）　平均算

あるクラスで英語のテストを行い、男子20人の平均は56点で、女子の平均は63点、全体の平均は58点だった。女子は何人か。

ひとりあたりの点数が平均点であるから横軸に、人数を縦軸に描き、面積は集団の合計得点を表すことになる。

（解）

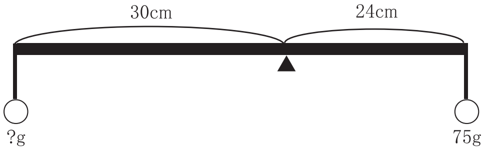


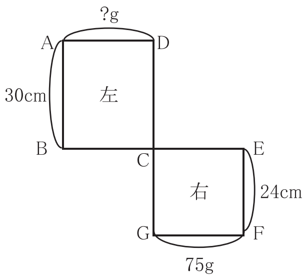
２種類の集団を表す長方形を重ねたL字型の図①に、全体の得点の長方形JHGDを書き足す②。平均の平均は、必ず高いほうと低いほうの間になる。JHGDの面積は、①のL字型の面積と等しい。したがって、L字型からはみ出した部分ABCDと、L字型のほうがはみ出している部分CGFEの面積は等しくなる。幅が2：5なのでAD：GF=5：2、すなわちEF=8と分かる。（解答終）

例題３～５の解き方で分かるように、鶴亀算・濃度算・平均算はどれも全く同じやり方、同じ図で答えが出る。すなわちこれらの問題は表現が違うだけで、本質は同じ問題なのである。

（例題６）　天秤

何gの重りで釣り合うか。





（解）

天秤のモーメント（支点の左や右に回そうとする作用）は、重りの重さと支点から重りの位置までの距離の積である。したがって、重りの重さを横軸に、支点から距離を縦軸に図を描き、面積でモーメントの大きさを表すことになる。そして、左右のモーメントの大きさが等しいときに釣り合うから、左の図の２つの長方形の面積が等しくなればよい。

高さが24：30＝4：5なので幅は5：4、すなわち60ｇと分かる。

（解答終）

鶴亀算や濃度算でL字型よりもはみ出している部分と、L字型がはみ出している部分の面積を等しくなることを利用したが、その部分の計算だけを行っているが天秤の計算である。参考文献９や10など、一部の受験参考書では天秤を用いて濃度の問題を解く方法が紹介されているものもあるが、解法を書いてあるだけで、仕組みを解説したものは見たことがない。その書籍でも鶴亀算や平均算には天秤による解法は使われていない。すなわち、解説を書いているほうも、問題の本質を理解していないということである。

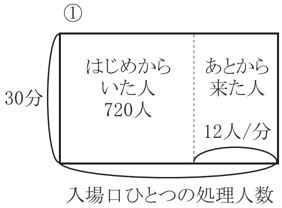
（例題７）　ニュートン算

あるサッカー場の入口の前に、入場直前に720人の行列ができていて、毎分12人の人がこの行列に加わり続ける。入場口が１個のときは30分で行列がなくなった。入場口を２個にすると、行列は何分でなくなるか。

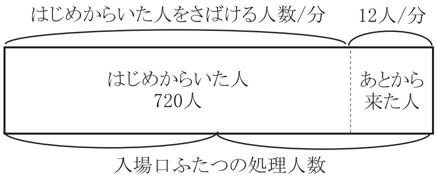
算数難問のなかでも最難関クラスといわれるニュートン算であるが、１分当たりの処理人数を横軸に、経過時間を縦軸にとり、面積で全処理人数を表せば、容易に解ける。

（解）

①



②



問題文の内容から①図が描ける。実際は初めから並んでいた人から先に入場させるわけだが、列に加わる12人は毎分の効率なので、横に並べて描くのが工夫のしどころである。この図より初めからいた人の処理が毎分720÷30＝24であることがわかり、追加で加わる人の処理との合計により入場口１箇所で毎分36人をこなせるとわかる。入場口が２箇所ならば毎分72人を処理できて②図を得る。初めからいた人をさばける処理能力は毎分60人ぶんとなり、720人を入場させるのは720÷60＝12分で終わる。（解答終）

ここまでは、特徴的な問題の基本レベルのものについて解説してきた。複雑なものについても応用できるので、一例を紹介する。

（例題８）　複雑な旅人算　(参考文献４)

４つの地点A, B, C, Dが等間隔にある。P, Qの２人が同時にA地点を出発してD地点に向かった。QはPより20分遅れてB地点を通過した。QがC地点を通ったとき、Pは28km先にいた。PはD地点に到着するとすぐに折り返した。C地点とD地点とのちょうど真ん中でPとQは出会った。

PとQの時速と、AD間の距離を求めよ。

多くの参考書類では、この類の問題ではまず線分図を書いて、たとえば以下のような図で考えて答えにたどり着くように解説されるだろう。

Fig.3　旅人算の線分図

（参考文献４による解説）

$20\times2=40$（分）

$28\div(40/60)=42$（km）…Pの時速

AB間を１とすると、P, Qの速さの比は、

$3.5:2.5=7:5$より、$42\times(5/7)=30$（km）…Qの時速

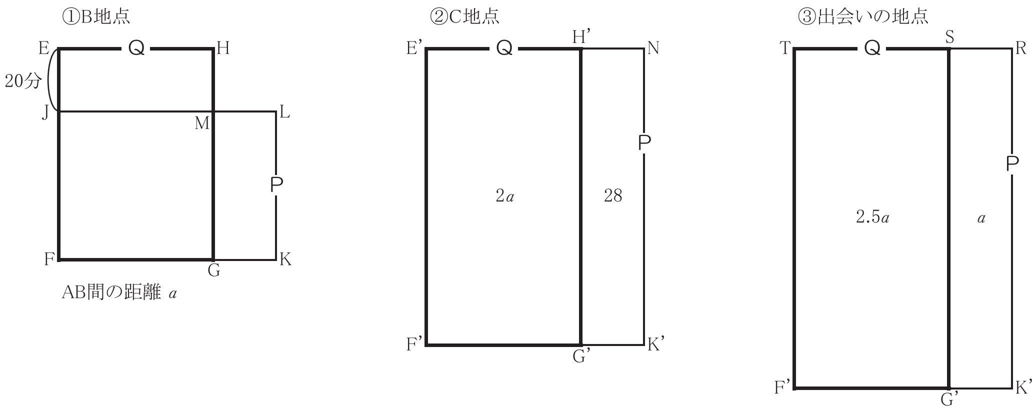
$28\div(7-5)=14$

$14\times5\div(2/3)=105$（km）…ADの距離　　　　（解答終）

ほぼ、式しか書いていない非常に不親切な解説である。また、この求め方をする限り、実は図はほとんど必要としない。図があったほうが頭の中は整理しやすいかもしれないが、受験問題慣れしている者でないととても理解できない解き方である。式だけが記述されているものを、家庭内で親が子から質問を受けたとしても、ほとんどの親は解説できないであろう。

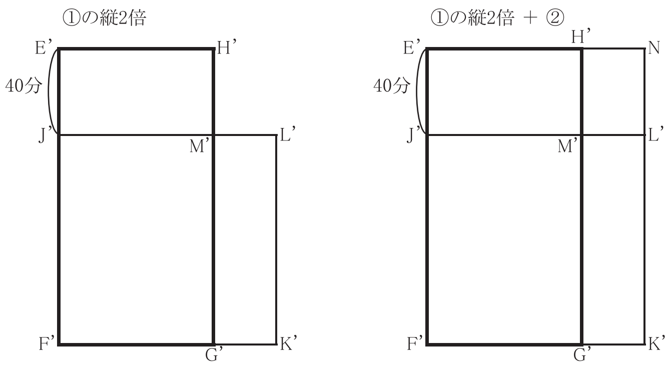
横軸に２人の速さ、縦軸に時間をとって図にまとめると以下のようになる。

（解）



図②と③の比較から、幅はそれぞれ同じで高さ（経過時間）が2：2.5になっているだけの違いなので、H’G’K’N：SG’K’Rも2：2.5で、$a=28\times(2.5\div 2)=35$と直ちに分かる。ADの距離は３倍の105kmである。

図①はQがB地点に到達した場面なので、EFGHとJFKLの面積は共にaになっている。この図を縦に２倍に拡大し、図②を重ねて描くと以下のようになる。



左図の重なり部分の右側M’G’K’L’と上部E’J’M’H’は面積が等しく、右図のH’G’K’Nの面積は28であるから、H’G’K’N＝M’G’K’L’＋H’M’L’N＝E’J’M’H’＋H’M’L’N＝E’J’L’N＝28となる。すなわち右図の上部E’J’L’Nの面積が28とわかったので、Pの時速は$28\div(40/60)=42$と求まる。あとは文献の説明と同じように3.5：2.5の比でQの時速も求まる。　（解答終）

参考文献４の模範解答はAD間の距離の出し方が技巧に凝りすぎている。比の差を利用することを目的に作問したとすれば、策に溺れて問題の本質を見落とした出題ミスであろう。冷静に問題が見えるような図にすることができれば、そのような失敗はすぐに発見できる。ただ漫然と図を描けばいつでも理解が深まるということではない。

3. 結　　　論

本稿では、単位当たりの量を用いる問題の新しい解法を提案した。鶴亀算や濃度算などの種々の算数難問題に適用してみることにより、別の問題として分類解説がなされてきた問題の本質が実は同一であったことが明らかとなった。また、仕事算では全体の仕事量を1と置いて始めるのが定番であるが、その必要がないことも示すことができた。

長方形の面積を用いる方法は、単位当たりの量をまず意識し、その量の積み重ねをも意識して図を描くので、問題の構造に対しての理解ができていないと難しい。一方、問題構造を理解していれば、付帯する余計な計算を極力排除することができるようになる。理解が進めば、鶴亀算を天秤で解くようなことも可能になってくる。また、わざと難しくしようとした出題の思い込みを指摘することもできた。

ここで紹介した方法では、長方形の相対的な大小関係は正しく保つが、長さの大小に関しては無視している。長さに関しては答えを出してみなくては分からないものであるから作図の時には不明なのである。抽象的な考えが不得手な者にとっては、長方形の図はその辺の長さなどの大きさも正しく表されていると思い込みがちであり、そこを相対的にとらえて考えることは難しいことかもしれない。

何々算はこのように解く、ということを個別に教えていても、実際に受験問題や就職活動のSPIの問題に使われるときには、その問題が何算であるかは示されず、受験者が判断するのである。したがって、目の前にある問題がどの種類の問題であるかを見分けられなければ、やり方だけを伝授しても役には立たない。

教育機関に従事する教育者は皆、よかれと思う教育を行っているはずである。自身をその現場まで導いた方法を伝授することも必要ではあろうが、それだけでは不足である。どの方法を使うべきかを見極めるための思考法、もしくは多くの問題に適用できる汎用性の高い解法の指導が要求されるのである。

参　考　文　献

1. 市川伸一, 2002, 学力低下論争, 筑摩書房.
2. 歌丸優一, 花摘香里, 2001, つるかめ算が3時間でマスターできる, 明日香出版社.
3. 岡部恒治, 戸瀬信之, 西村和雄, 1999, 分数ができない大学生, 東洋経済新報社.
4. サピックス小学部算数科, 2009, 旅人算, 小学5年算数デイリーサポート510-22, 進学教室サピックス小学部.
5. 新星出版社編集部, 2017, 就活生1000人に聞いた これが出る！ SPI, 新星出版社.
6. 成美堂出版編集部, 2016, 最新最強のSPIクリア問題集 '17年版, 成美堂出版.
7. 馬場敬之, 2004, 数学を人に教えられる本, マセマ出版社.
8. 藤澤伸介, 2002, ごまかし勉強, 新曜社.
9. 山口卓, 2020, 2022年版ワザあり全力解説! ゼロからわかるSPI, 永岡書店.
10. 山口卓, 2020, 2022年度版速攻!！ワザありSPI, 永岡書店.
11. 芳沢光雄, 2019,「％」が分からない大学生, 光文社.
12. 芳沢光雄, 2020,「％がわからない大学生」の読解力, 文藝春秋, Vol.98, No.4, pp.252-259.

〔2020. 9. 17　受理〕

コントリビューター：清野　聡　教授（現代ビジネス学科）