

# 数学教師にとってのデジタル技術の信頼性と危険性

橋 本 正 継

Dependability and Dangers of Technological Tools for Teachers of Mathematics

Masatsugu HASHIMOTO

児童教育学科, 教育学部,  
安田女子大学

## 要 旨

数学教師は授業の中でさまざまなデジタル技術を用いている。年々その進歩の度合いやスピードはめまぐるしい。そうした変化の中、最新のデジタル技術を適切に活用したいという教師の意識や知見そして実際の活用技量等が新しい関心の的となってきた。他方、ネット検索やアプリ等のデジタルツールを用いて入手した情報に対して、無批判的に受容している学生の様子を目にする。本論では、具体的な事例に基づきながら、デジタル技術の利用に関連した数学の指導や理解の落とし穴や危険性について言及する。また、こうした事例が数学の指導や学習に対してどのような示唆をもたらすかについて議論する。

キーワード：数学教師、デジタル技術、ICT活用、信頼性、危険性

## 1. はじめに

数学教師は日々の実践の中でさまざまな形態のデジタル技術<sup>注1)</sup>を用いている。年々その技術的な進歩の度合いやスピードはめまぐるしく、その変化に追いつけないというのが正直なところである。そうした現実の動きの中で、学生の学習を一步先の新しいデザインへと押し進めるために、できるだけ積極的に新しい指導法や最新のデジタル技術を用いたいという教師の意識や教育的な知見および活用技量等が、その長短を含めて、新しい関心の的になってきている (Leung etc., 2017)。

デジタル技術活用を取り巻く環境の変化および「主体的・対話的で深い学び」の推進を受けて、文部科学省（以下、文科省）は「2020年代に向けた教育の情報化に関する懇談会」（文科省, 2016）にて「教育の情報化加速化プラン」を提唱し、「教員のICT活用指導力チェックリスト」（文科省, 2019a）を改訂した。また全米では、数学教師教育協会（以下、AMTE）が、数学教師がもつべきデジタル技術に関する数学の授業を想定した専門的知識の枠組みを「数学-TPACK」モデル（以下、TPACKモデル）（AMTE, 2009）として提示した（図1）。このTPACKモデルは、KoehlerとMishraらの研究に基づくTPCKモデル（Koehler & Mishra, 2009）を拡張し、特

にデジタル技術と数学および数学教育との関連部分に焦点を当てたモデルとなっている。

TPACKモデルとTPACKモデルのいずれも、スタンフォード大学の教育心理学者 Shulman による教師の教職専門と教科専門のいずれも含む専門的知識 (PCK) の研究手法 (Shulman, 1992) に基づきながら、昨今のデジタル技術が教師のもつべき授業を想定した専門的知識にどのような影響をもたらすかについて詳細な検討を加えている。図 1 に示されているように、AMTEのレポートにおいては、TPACKモデルに示されている教師の専門的知識の中の3つの要素 (CK: 教科専門、PK: 教職専門、TK: デジタル技術) を考察の軸に据え、それらの間の交差部分 (intersection) や相互作用部分 (interaction) に焦点を当てている。Shulmanが「授業を想定した教材の知識 (PCK)」を「教師が保有している教育内容の知識 (CK) を、児童・生徒の能力や背景の多様性に応じて教育的に適切なかたち (PK) へと変容する教師の複雑かつ柔軟な能力」と定義したように、数学の指導および学習との関連において、TPACKモデルは児童・生徒の数学学習の理解のプロセスに対する教師の見識および数学の指導やデジタル技術による学習の拡張や改善の能力 (TPCK) に関心を向けている。

日米ともに今後10年から20年の間に、デジタル技術は社会のインフラや人々の行動様式を大きく変える基盤技術になると位置付けている。特に、解決が難しい多くの社会問題、いわゆるSDGs (持続可能な開発目標) を達成しうる鍵を握ると期待されている。そして、次世代を担う児童・生徒の情報リテラシーの育成は、教師のICT活用能力に強く依存しているという共通認識である。教育分野での日米の対応の大きな違いは、わが国がすべての学校種やすべての教科において包括的に対応しようとしているのに対して、欧米各国はSTEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) 教育に代表されるように、ある程度領域や教科を絞って対応している点であろう。本論のように数学の授業や学習ではどのように対応すべきかというテーマを設定すると領域や教科を絞った欧米の先行研究にその多くを学ぶことになる。

しかしながらその一方、日々の授業の中で、容易にアクセスできる幅広いネット情報やコンピュータによるさまざまなソフトウェアを用いて入手した情報の信頼性や正確さに関して、無批判的な受容に終始している学生の様子を目にする。本論では、具体的な事例に基づきながら、デジタル技術の利用に関連した数学の指導や理解の落とし穴や危険性について言及したい。第3節および第4節において、デジタル技術で入手した情報や結果などが不正確であったり不完全であったりして、学生をミスリードしてしまうおそれがあることを、具体的な事例をもとに提示したい。こうした事例を数学におけるデジタル技術の教育利用に関連して適切に位置づけるために、第2節においてDick (2007) による数学教育におけるデジタル技術の「信頼性 (Fidelity)」の概念を取り上げ、その概要を述べ、その有用性を例証したい。最後の第5節において、こうした事例が数学の指導や学習に対してどのような示唆をもたらすかについて議論したい。

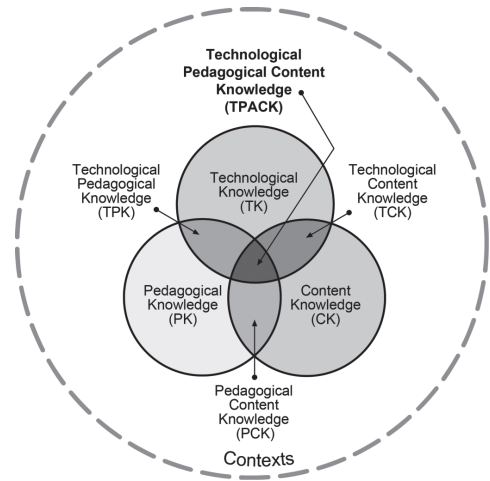


図1 TPACKモデル

## 2. デジタル技術の信頼性について

Dickは、数学教育におけるデジタル技術の利用に関連して信頼性 (Fidelity) という概念を導入した。デジタルツールのソフトウェア設計者を対象とした議論であるが、教育的信頼度、認知的信頼度、数学的信頼度の3つの視点から考察している。

Dickによれば、デジタルツールの教育的信頼度とは、学習者と数学との相互作用、すなわち、数学の対象を創造したり、操作したりする機能であったり、あるいは、こうした数学的な思考過程を提示してくれることを指している。また、認知的信頼度とは、デジタルツールが学生の認知プロセスに忠実に呼応しているかどうかを指している。すなわち、デジタルツールがうまく機能したときには、数学的概念がよりよく理解されたということを認知的信頼度の達成基準としている。認知的信頼度を高めれば、わたしたちはデジタルツールとの相互活動を通して、数学的なパターンのイメージをよりよく可視化することができるようになるとしている (Bos, 2009)。

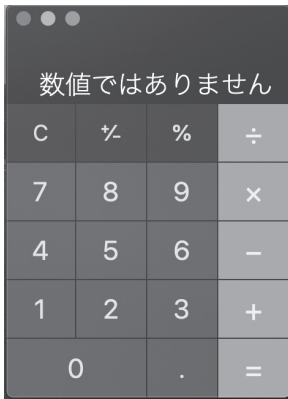
3つ目の数学的信頼度とは、デジタルツールの一貫性が数学的な正確さとうまく符合することを指している。すなわち、数学そのものが数学的コミュニティによって支持・理解されているようなものであると述べている。この考えは当然のことにように思えるが、デジタルツールの開発において、この信頼性を確保することはさまざまな技術的な制約のため、その実現は容易ではない。数学的信頼度に関連する主要な問題は、ディスプレイサイズ等の制約から計算結果が省略されて表示されたり、四捨五入して表示されたりすることや、あらゆる情報をデジタル化して処理するコンピュータの宿命とも言えるが、連続的な現象を離散的な構造によってモデル化せざるを得ないという課題がある (Zbiek etc., 2007)。例えば、23を7で除算した結果が電卓の画面に3.28571429と表示された場合、学習者の多くは無限小数表示を四捨五入した近似的な表現であるとは理解せずに、完全に正確な商であると見なしてしまうかもしれない。数学的に正しい結果は、3.285714、つまり小数点以下6桁の数を無限に繰り返す循環無限小数である。

## 3. 数学的信頼性欠如の事例

ゼロによるわり算は、多くの危険な落とし穴の原因であり、数学での厄介なトピックとして知られている (Thanheiser etc., 2014)。この場合において、電卓は何の助けにもならず、逆にゼロによるわり算に関連した誤解を助長するおそれがある。

図2は、3をゼロで割った結果を身近にある電卓を用いて例示している。(a) MacBookのダッシュボードにある電卓、(b) Windows10 のアプリケーションの電卓、(c) GoogleのWebページの電卓 (順に「数値ではありません」、「0で割ることはできません」、「Infinity (無限大)」などのメッセージが表示される。) これらのメッセージには一貫性がなく混乱を招く一方、ゼロによる除算が未定義であるという数学的な約束事と必ずしも一致していない。AI技術に基づく Siri (iPhoneやiPadに搭載されているAppleのパーソナル・バーチャル・アシスタント) に質問してみてもいい。すると、 $3 \div 0$ を「未定義」と表示する計算機は適切な仕様であるが、その前段に表示される説明は誤解を生み出すおそれがあるかもしれない (図3参照)。

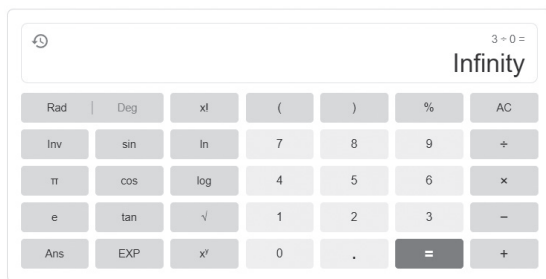
学生と一緒にフィボナッチ数の隣接2項間の比の変化を表計算ソフトで探究しているとき (図4参照)、「(nの値が8の) 8行目以降は連続する2つのフィボナッチ数の比率が一定である」という学生の気づきを耳にした。これは、表計算ソフトの小数点以下の桁表示が2桁に設定され



(a)



(b)



(c)

図2 いろいろな電卓でのゼロで割った表示



図3 ゼロで割る計算のSiriの反応

ていることに基づいている (図4の左から3列目)。確かに、表計算ソフトによると、21 (フィボナッチ数の8番目) と13 (フィボナッチ数の7番目) の比率が1.62と表示されており、それ以降の34 : 21、55 : 34なども同じように表示されている。

小数点以下の桁数をより多く表示する設定を学生に試してもらった (図4の左から4列目)。表示桁数を大きくすると、 $n$ の値が25の25行目から比率が一定であるという結論になる。このように小数点以下の表示桁数をより大きくすることで、「ある行から比率が一定である」という結論に反論することはできるが、さらにより詳細な比率を表示することで一連の数値の変化を見ていっても際限はなく、数学本来の「極限」という概念が曖昧になってしまうおそれがある (例えば、図4の左から5列目のように)。

もう一つ興味深い事例を紹介しよう。驚くなかれ、ほとんどの関数電卓において、 $3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$ であることを確認できる (図5(a)、(b) 参照)。この式はあの有名なフェルマーの最終定理の反例である。(フェルマーの最終定理とは、 $n > 2$ の整数に対して、 $a^n + b^n = c^n$ を満たす正の整数  $a, b, c$  は存在しないという Andrew Wiles によって数学的に証明された定理である。よって、もしこの例のような整数が存在するとすると数学界はたいへんなことになる)。

しかし、より高度な計算能力 (GoogleのWebベースの電卓でも容易に検証可能である) があれば、図5(c) に示すように、 $3987^{12} + 4365^{12}$ の12乗根は4472.00000001と表示され、この反例の存





考・判断・表現力の育成の文脈で、このアプローチを導入・発展させた。初期の実践形態では、授業用の指導計画に基づく発話計画および児童・生徒の反応予想は「レッスン・プラン（授業計画）」ならぬ「レッスン・プレイ」と呼ばれ、教師と児童・生徒との間の授業での想定上の対話を記述していた。最近では、この方法の範囲が広がり、授業計画に限定されない、教育活動の中に登場する人物同士に間に想定される対話（広くは自己内対話も含む）を記述したものとなっている（Zazkis etc., 2009）。

内省的記述には、教育的課題の内在する状況（たとえば、児童・生徒の意見対立やつまずきがある場面、あるいは不適切な思考過程など）が提示される。内省的記述を作成する主眼は、登場人物（たとえば、生徒のみであったり、教師と生徒の双方であったりする）の間の対話を工夫して学習上の問題を解決へと導くことである。内省的記述は、研究データとして活用されたり、また、授業内での解決策を導き出す際の基礎資料としての役割を果たすこともある。私は内省的記述を、授業における登場人物がいきいきと振る舞うダイナミックな様相を記述したロールプレイングの形態の一つと捉えている。

中でも、教員養成に携わる者にとっては、内省的記述は教育学的・数学的アプローチの長期的な見通しを提供し、教師とともに授業を振り返る作業の中で、課題をより浮き彫りにし、より明確な課題へと議論を促進させることができる方法の一つと捉えている。これらは、授業がどのような構想のもとに実践されているかを検討するための見通しを提供し、授業者の数学に対する理解についての内実を提示してくれることにもなる。

時として、内省的記述は、教育実践でのデジタル技術の役割をよりはっきりと浮き彫りにすることがある。以下では、内省的記述の中で学生がデジタルツールに過度に依存していたことを示す事例を取り上げる。その課題では、前提となるデジタル技術への信頼性が誤った結論を導き出してしまふことになるが、その誤りは当人にも受け入れられ、そのことがその後の議論を深める契機としてうまく機能する事例を取り上げる。

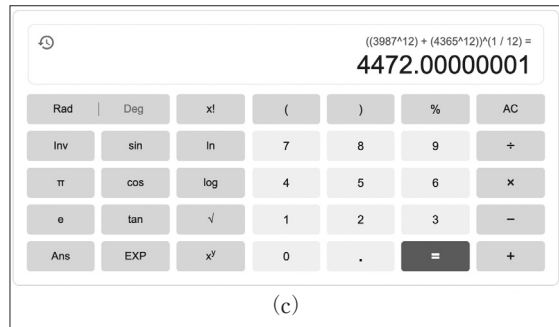
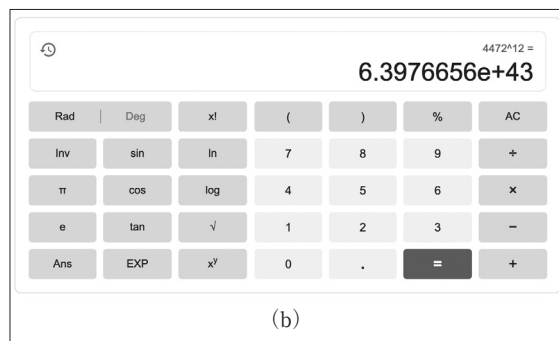
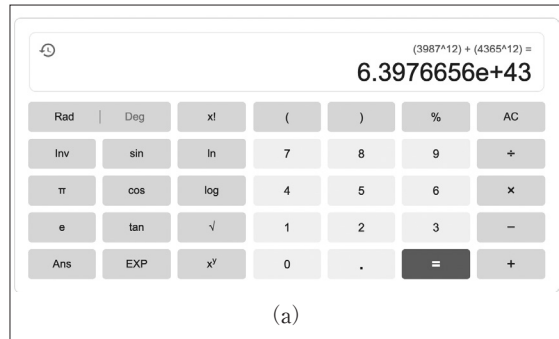


図5 フェルマーの大定理の反例?!

批判的思考を高めることを想定した内省的記述の課題において、学生は、「多角形の外角の和は360度である」という定理の妥当性を議論す

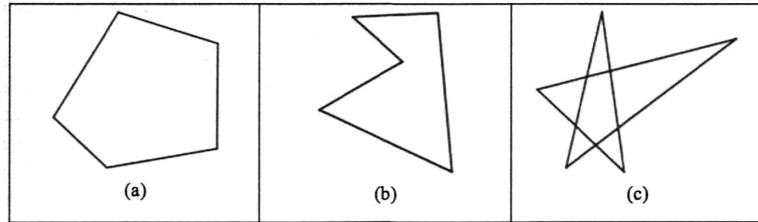


図6 五角形の例: (a) 凸型、(b) 凹型、(c) 非単純

るように求められた。学生は、この定理の適用範囲をネット検索情報やデジタルツールを活用しながら、必要に応じて議論を重ね、当初の多角形に関する一般的な定理を書き換える必要に迫られることになる。

中学校数学の教科書を見ればわかるように、先の多角形に関する定理は特に断りが無い限り、単純凸型多角形(図6(a))に適用される。しかしながら、最近ではウェブアプリ等で手軽に高機能なグラフィックツールを利用できるようになっている。これらを活用すると、教科書等よりも広範な多角形が目の前に展開される。従って自ずと、定理の適用対象にこ

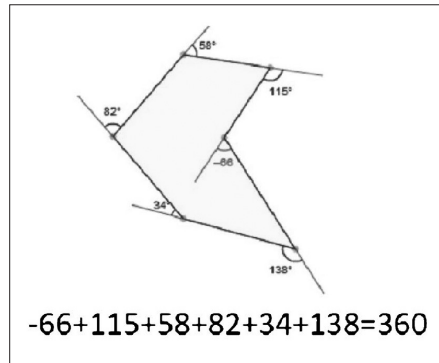


図7 凹型多角形の外角の和

れまで以上に注意を向ける必要が生じる。つまり、凹型多角形(図6(b))や辺が自己交差する非単純多角形(図6(c))についても定理の妥当性を検討する必要が生まれ、この定理には書き換えの必要が生まれることに注意してほしい。凹型多角形ではいくつかの外角は負の値として取り扱われ(図7参照)、非単純多角形においては、星型の場合の外角の和は360°の倍数になる(図8(c)参照)が、それ以外のケースにおいては特定の値に定まらない(Kontorovich etc., 2016)。

当初、私には学生がネット情報やデジタルツールを適切に利用しているかどうかについて関心はなかった。しかしながら、学生のほとんどが内省的記述の中にインターネットでアクセスした情報を参照したり、様々なアプレットのスクリーンショットを入れていたことに気づいた。次は、ある学生のグループに課題提出後に聞き取り調査を行ったメモの抜粋である。学生のネット情報活用状況を例示している。抜粋に提示されている内容は、学生が凸型多角形と凹型多角形の両方について、それらの外角の和を検討した後に生じたやりとりの一部分である。

<聞き取り調査からの抜粋>

S-B1: でも、このような多角形はどうでしょう? (辺同士が交差する非単純な多角形の図が内省的記述に添付されていた [図6(c) 参照])

S-A1: それは多角形ですか? 辺の交差した多角形は本当の多角形なの?

S-B2: 多角形に関する多くのルールが非単純な多角形には当てはまりません。そして、この場合、外角の総和は360°には収まり切れません。[図8参照]

S-A2: でも、このリボンのような多角形はどのように考えて、1つの多角形といえるのですか? 頂点を共有する2つの多角形とも捉えられますよね。[図8(a)(b) 参照]

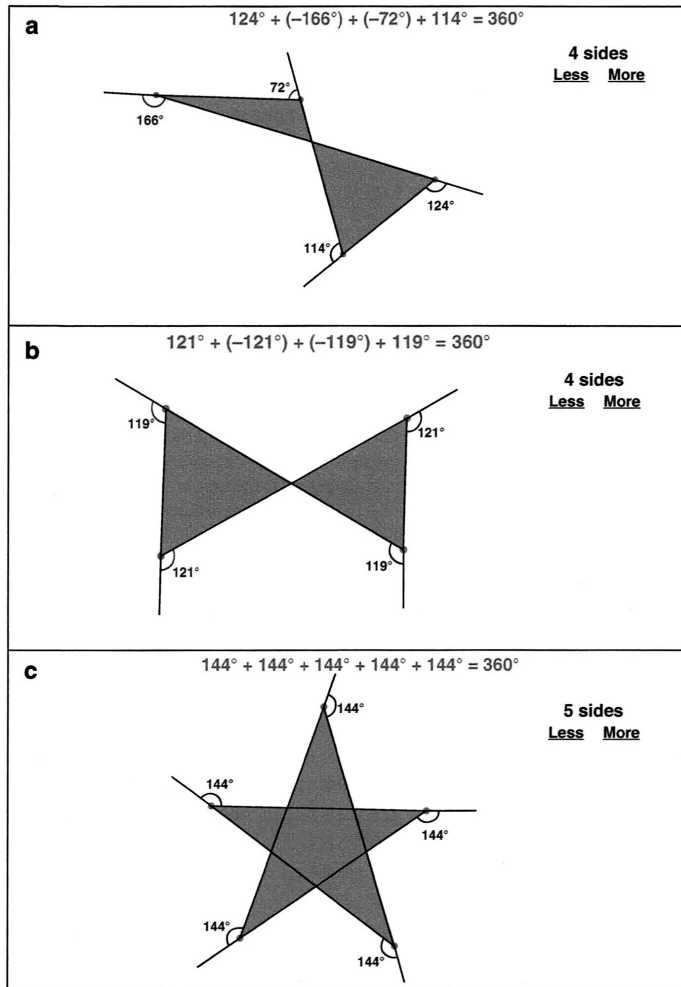


図8 非単純多角形の外角の和

S-B3 : PCで検索した情報によれば、「多角形には凸型、凹型、星型がある」とあります。[図6参照]先生、これは正しいですか？

T1 : ピタゴラスの時代から、多角形には自己交差型の非単純な多角形が含まれています。でも、ピタゴラス学派は無理数の存在を認めなかったんだよ。彼らが何かに関してある決まった定義を持っていたからといって、それが今日でも有効であるとは限らないし、私たちがそれを受け入れなければならないわけではありません。

S-B4 : ウィキペディアによれば、「数学界で最も一般的に受け入れられている多角形の定義は、頂点と呼ばれる終点で対になって結合された線分で構成された単純な閉じた図形である」と記されています。ユークリッド幾何学では、この定義が用いられており、その結果はこの事実に基づいています。もちろん、この定義に同意しない他の分野の人も



いるでしょうが、多くの人に共通する基準は、あなたがリボン型と呼ぶもの〔図8(a)(b) 参照〕は、通常は多角形とはみなされないということです。

S-B5：私はウィキペディアだけでなく、それ以外のサイトでも多角形の定義について調べて、確認してみることにします。

われわれ数学教師としては、一般的には教科書等に代表されるように、図形の定理の確実性を保証するために、あるいは、誤った推論が生じるおそれを回避するために、定理が適用される多角形の外延を制限している、と理解している。しかしながら数学教材としての定義や定理の適切さの問題は別に譲り、ここでは学生がネット情報にアクセスして、さまざまな事例に関する適切な判断を行っているかどうかを検証するためのデジタル技術の教育的・認知的信頼性に焦点を当てることにする。

まず第一にネット情報の教育的信頼性の問題である。ここに抜粋した会話は、教師と学生が「辺の交差した非単純多角形」が「本当の多角形」であるかどうかを判断するために、さまざまなウェブベースのリソース（Wolfram MathWorldやウィキペディアなど）を使っていたことを、学生たちの生の声として示している。さらには、学生が、信頼できるウェブベースのリソースと個人の見解を示しただけのウェブサイトを区別する十分な注意を払っていなかったことを示している（S-B3）。ウィキペディアの冒頭箇所に掲載されている「この記事は不十分です」という断り書きからわかるように、この定義（S-B4）はウィキペディアのディスカッション・ボリュームから引用されたものであることに注意する必要がある（Talk：Polygon, Wikipedia）。これは広く公的に認められた定義ではなく、その名が示すように議論の場で示された暫定的な定義に過ぎない。よって、無批判的に受け取るべき定義ではない。幸いにして、学生の中には多角形の定義についてウィキペディアでは両論併記の玉虫色の結論しか示されていないことを察知し、別のネットリソースでも調べる必要があることを示唆している点（S-B5）は適切な判断と言える（Polygon, Wikipedia）。

次は、ネット上にウェブアプリとして提供されている教育用のグラフィックツールの信頼性の問題である。図形を紙や黒板上の静止した図として学習する場合と画面上で動的に位置や形を変化させながら学習する場合とでは、児童・生徒の図形理解への認知的なインパクトは大きく異なる。図形を画面上で動的に変化させることで、何がどのように変化し、逆に何が変化しないのかを直観的に捉えることが可能になる。デジタルツールが児童・生徒の図形学習の認知的側面を強力に支援してくれると言えよう。一方で、それらのスクリーンショットとして記録された図7と図8を注視すれば気づくように、実は多角形の外角の和を求める数式が誤っている。図7では数式からは $359^\circ$ になるべきであるが $360^\circ$ と表示され、図8においても同様な誤りを指摘することができる。図7の場合は、おそらく画面上のそれぞれの角の大きさを整数値に丸めることから生じた誤りであろう。図8の場合は、このツールを提供しているウェブページをよく見ると、このツールを適用できる多角形の制限事項が注意書きされている（<https://www.mathopenref.com/polygonexteriorangles.html>）。この制限事項を見落としてしまうと誤った認識へとミスリードされてしまうおそれがある。

## 5. 結 論

デジタル技術によるさまざまな道具や情報などは私たちの生活の重要な要素であり、情報獲得あるいは情報の活用や操作にも使用されている。学生や教師もまた特定の課題に必要なかどうかには関係なく、デジタル技術のさまざまなサービスに知らぬ間に依存してしまっている。経験豊富な数学教師ですら、有益な情報あるいは熟慮すれば不正確ながらも一見合理的と思われる解釈によって、最終的に誤った方向に導かれてしまいがちである。

しかしながら、デジタル技術の数学的な信頼性に関する課題は今なお残っており、Oliveら(2010)は多くの人が計算機はけっして間違えることはないという幻想を抱いていることについて言及している。一定の割合の教師が、コンピュータが導き出した結果に無批判的な信頼を寄せているという点を指摘している。

わたし個人が思う最大の課題は、教育実践者のビジョンと教育ツール設計者の技術力のギャップを埋める架け橋を構築することである。具体的には、数学の学習活動のアイデアから、その活動を容易にし、かつ忠実に実現する技術ツールの実装までを効率的に進める仕組みやそれを容易に実現するためのツールの開発である。現在、数学教師やカリキュラム開発者の多くは、自分のアイデアや活動をツールの仕様に合わせているのが現状である。その過程で、オリジナルのアイデアが適切に教材化されることもある。まれに、技術的な知識やプログラミングの知識を持った実践者が、オリジナルのビジョンを損なわないようにツールをデザインしたり、教育活動に適応させたりすることができる場合もある（あるいは、そのような実践者と十分なコミュニケーションをとることができる場合もある）。しかしながら、まだ十分とは言えない。

私たちが目指すべきは、オーサリングツール、つまりツールを構築するためのツールの概念であり、それは一種の「マクロな」構築キットを提供し、ユーザーフレンドリーなインターフェースと堅牢な操作性を備えた、児童・生徒のための独自の「学習小世界」を作成するためのものである。数学教師やカリキュラム開発者が自分のアイデアをすぐに使える信頼性の高い数学学習のための技術ツールに直接実装することができるオーサリングツールは、技術革新から教育革新へと状況をシフトさせると思われる(Minsky etc., 2020)。

最新のAMTEのスタンダード(AMTE, 2017)には、数学指導の際に求められる知識の項目の中に、デジタル技術に基づく数学的な道具やスキルの活用が含まれている。中でも、数学教師にはデジタルツールの教育的な可能性と同時にその限界の両方へのまなざしが必要不可欠であると述べられている。Leungら(2017)は、特定の環境が学習者の潜在的な可能性の広がりになるか、それとも落とし穴になるかは、教師のデジタル技術に対する知見に強く依存していると述べている。数学教師がデジタル技術の信頼性を適切に見定めることができる方向へと、数学教師の意識を明確に方向付けることが重要である。

注1) 本論でのデジタル技術とは「コンピュータ、ソフトウェア、通信ネットワーク」を指す。よって、本論で取り上げる事例はいずれもデジタル技術なしでは実現不可能あるいは困難な教育内容や方法である。ところで、ここ数年、AI・IoTやビッグデータに代表される最先端のデジタル技術が指数関数的な発展を見せている。病気を診断したり、人間の質問を聞いて答えたり、正しい文章を書いたりするようになり、ロボットはほとんど指示を与えなくても作業し、さらには車の運転をするようになった。このような最先端のデジタル技術の教育への応用も今後本格化することは間違いない。しかしながら、本論では、AI等に代表される最先端のデジタル技術の教育利用には踏み込んでいない。なお、ICTとは「Information and Communication Technology (情報通信技術)」の略で、通信技術を活用したコミュ

ニケーション全般を指す。インターネットのような通信技術を利用したサービスなどの総称である。文科省の提唱する「GIGAスクール構想」(文科省, 2019b) は、学校へのパソコン等の児童・生徒一人一台や高速通信ネットワーク導入などに代表されるように ICT の環境整備が中心である。ICT はデジタル技術の中の「通信ネットワーク」の部分を軸とする捉え方といえよう。

## 参 考 文 献

- 二宮裕之(2005)『数学教育における内省的記述表現活動に関する研究』, 風間書房.
- 文部科学省(2016)「2020年代に向けた教育の情報化に関する懇談会」(最終まとめ). (参照2020/08/27)  
[https://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/zyouhou/1369482.htm](https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/zyouhou/1369482.htm)
- 文部科学省(2019a)「教員のICT活用指導力チェックリストの改訂」.(参照 2020/08/27)  
[https://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/zyouhou/detail/1416800.htm](https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/zyouhou/detail/1416800.htm)
- 文部科学省(2019b)「GIGAスクール構想」.(参照 2020/08/27)  
[https://www.mext.go.jp/a\\_menu/other/index\\_00001.htm](https://www.mext.go.jp/a_menu/other/index_00001.htm)
- Association of Mathematics Teacher Educators. (2009). *Mathematics TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) Framework*. Retrieved Aug. 28, 2020 from  
<https://amte.net/sites/all/themes/amte/resources/MathTPACKFramework.pdf>
- Association of Mathematics Teacher Educators. (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics*. Available online at [amte.net/standards](https://amte.net/standards). Retrieved Aug. 28, 2020 from  
<https://amte.net/sptm>
- Bos, B. (2009). Technology with cognitive and mathematical fidelity: What it means for the math classroom. *Computers in the Schools, 26*(2), 107-114.
- Dick, T. P. (2007). Keeping the faith, fidelity in technological tools for mathematics education. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and Learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 333-339). Information Age.
- Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60-70.
- Kontorovich, I., & Zazlds, R. (2016). Turn vs. shape: Teachers cope with incompatible perspectives on angle. *Educational Studies in Mathematics, 93*(2), 223-243.
- Leung, A., & Baccaglioni-Frank, A. (2017). Introduction. In A. Leung & A. Baccaglioni-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls* (pp. vii-xvi). Springer.
- Marvin Minsky (著), Cynthia Solomon & Xiao (編集), 大島芳樹(訳) (2020)『創造する心 —これからの教育に必要なこと』, オライリージャパン.
- Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kor, L., Kosheleva, O., & Strasser. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In C. Hayles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology- Rethinking the terrain (the 17th ICMI study)* (pp. 133-178). Springer.
- Polygon. In *Wikipedia*. Retrieved Aug. 28, 2020. From  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Polygon>
- Shulman, L. S. (1992). Toward a pedagogy of Cases, in J. H. Shulman, *Case Methods in Teacher Education*, Teachers College Press.
- Talk: Polygon. In *Wikipedia*. Retrieved Aug. 28, 2020. From  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Polygon>
- Thanheiser, E., Whitacre, I., & Roy, G. J. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A Focus on whole-number concepts and operations. *The Mathematics Enthusiast, II* (2), 217.
- Zazkis, R., Liljedahl, P. & Sinclair, N. (2009). Lesson Plays: Planning teaching vs. teaching planning. *For the Learning of Mathematics, 29*(1), 40-47.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Information Age.

[2020. 9. 17 受理]

コントリビューター：吉田 裕久 教授（児童教育学科）