

正接近似値による n 芒星作成のための中心角の実用的折り出し方法

水 谷 昌 義

A Practical Approach to Making Regular Polygons
by Using the Approximate Value of the Tangent

Masayoshi MIZUTANI

要 旨

正接の値を実現するような、直角三角形の直角を挟む2辺の長さを再現することにより、任意の角度を実際の紙を折って作り出すことができる。ただし、紙には厚みがあり、折り重ねの際にはどうしても誤差が伴ってしまうため、理論上の可能性と現実の間には大きな隔りがある。

本稿では、紙を折るときの誤差は避けられないものとしたうえで、簡便でかつ精度の高い近似で折り出しを行い、正多角形などをつくる実用的な方法を提案する。理論上きわめて高精度な近似を、手軽な折り出しで実現することが可能であることを示す。

キーワード：正接近似値，正多角形，中心角，折り紙作図，折り出し

1. は じ め に

正接(タンジェント)の値を実現するような、底辺と垂辺の長さを再現することにより、任意の角度を作り出すことができる。物差しを使用した作図では容易に実現可能であるが、寸法を測ることなく1枚の紙を折って作り出すときには、長さは自由に取れるものではない。勿論、充分大きな自然数を用いれば、有限桁の小数表示の値は実質上実現可能であるが、これは現実的には不可能である。たとえば、底辺の長さ13、垂辺の長さ40の直角三角形を正方形の紙から折り出すには、縦横それぞれ64等分に折って紙をあたかも方眼紙のような状態にして、その13番目と40番目を結ぶ斜辺を得れば実現できる。しかしながら、64等分するには2等分する操作を6度繰り返すわけであり、1度ごとに生ずる誤差が累積し、6回も繰り返すことはどんな器用な人にもなかなか難しいことである。これは、紙には厚みがあるということの影響のみならず、折り重ねの際にはどうしても誤差が伴ってしまうためであって、理論上の可能性と現実の間には大きな隔りがある。

川村2005 [4] では、正接に加え正弦(サイン)と余弦(コサイン)についても折り出しの方法を提案しているが、まず2辺の長さを紙の上に測りとってから折り始めている。長さの目印をつけたのならば、いまさら凝った折り操作をする必要もなく、単純に製図の結果を使えば充分なのであり、測りとった直角三角形の3辺目を折るだけのことである。理論の検証に新鮮な部分があるとはいえ、折り出しの目的に酔ってしまい、実質を見失っている論考であると言えよう。Hull

2015 [7] も三角比の理解は折紙の課題であるかどうかを論じており、筆者の意見と軌を一にする部分がある。

本稿では、紙を折るときの誤差は避けられないものとしたうえで、長さを測定することなく、なるべく少ない工程で、簡便でかつ精度の高い折り出しを行う方法を提案する。正 n 角形や n 芒星を作成するには、中心角の360度を $2n$ 等分する必要があるが、正方形用紙から、それに必要となる角度を実際に折り出す方法を考案し紹介する。それにより、理論上きわめて高精度な近似を、手軽に実現することが可能であることを示す。

2. 作図と折り出しの比較

いわゆる数学での作図⁽¹⁾では直線定規とコンパスだけを用いて様々な作業をする。ユークリッド作図を実際に行ってみると、線分の移動や円弧の交点などを求めるたびに、誤差が累積していき、理屈どおりの結果が得られないことがしばしばある。しかしながら、理論的に完備であれば、実際の作業での不都合は問題なしと見做される。

一方、正方形の紙を折ることにより作図できるものを「折り紙作図」⁽²⁾と呼ぶ。理論的研究として完成された学術領域であり、ユークリッド作図で行えることは理論上すべて折り紙作図でも行えることが明らかとなっている(Geretschläger 2014 [9])。さらに、ユークリッド作図では不可能であっても、「任意の鋭角の3等分」(阿部1980 [1])など、折り紙作図では実現可能なものも存在する。

しかし実際には、紙には厚さがあり、折るときには紙が軋んで変形もする。そもそも放置しておくだけで湿度の影響で紙には変形が起こる。それに加えて作業者の腕の巧拙も出来上がりに顕著に現れる。このように、紙を折って実際につくる場合には、誤差の影響はユークリッド作図を実行するよりも一層重大であって、理論の実証実験はうまくいかないことが多い。本稿では、手先の技術に多少なりの自信のある人が実際の紙を折って目的の作図結果を表現する作業のことを折り出しと呼ぶことにする。理論上精緻なことをいかに簡便に実現するかの工夫が、折り出しでは必要となる。

たとえば、線分の移動は、ユークリッド作図では任意の場所に容易に可能であるが、折り出しの場合にはいずれかの軸で線対称の位置にある場合のみが可能である。線対称移動を2度繰り返せば再帰的に任意の位置に移動可能であるが、折るたびに誤差が出て、しかも長さの転写にもそれ以上の誤差がついて回るので、かなり大きくしかも薄い紙で慎重に行う場合でないと実的にうまくいかない。

正方形から正5角形を折り紙作図することは可能である(たとえば玉木1994 [6] など)。正方形に内接する正5角形の辺の長さは比較的容易な作図で求められる。しかしこれを実際の折り出しで行おうとすると、辺(線分)の移動を複数回行う必要があり、筆者が何度も行ってもなかなかうまく作れない。長さの目印を筆記具で書きしるすなどの作業を追加しなければ無理である⁽³⁾。

長さの転写が困難である一方で、辺や角度を2等分・4等分などすることは比較的容易に、すなわち正確に実行できる。辺の場合は角や交差する辺を、角の場合は2本の辺をガイドとして作業ができるからである。

このような特性を理解したうえで、折り出しの方法は考案する必要がある。

3. 実用性のある近似の見つけ方

本稿では、正 n 角形や n 芒星をはじめとする星形(の輪郭)を切り抜くための、折り出しを考える。

5芒星とは、正5角形の2つ離れた頂点(間に1つの頂点を挟む)を結ぶ対角線のすべてから構成される図形⁽⁴⁾で、いわゆる星の形である。正5角形の代わりに任意の正 n 角形の m 個離れた頂点(n と m は互いに素、 $n/2 > m \geq 2$)を結ぶ対角線群から構成された図形が n 芒星となる。厳密には対角線群からなる図形のことではあるが、実際には輪郭部分だけでも n 芒星と称されることも多い。さらに、 n 芒星の谷の中心からの距離を等しく拡大(または縮小)した図形も星形と呼ばれているようである⁽⁵⁾。

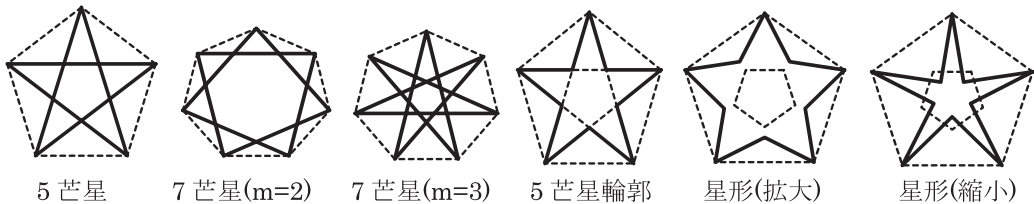


fig.1 n 芒星と星形の例

容易にわかるように、正 n 角形や n 芒星の輪郭を切り抜くためには、紙の内点(中心が望ましい)の周りを、 $360 \text{度} \div 2n$ の中心角で等分割することが必要となる。また、たとえば正5角形のための36度分割ができれば、その角度をそれぞれ半分に分けることによって正10角形も簡単につくれるので、ここで考えるべき n としては合成数でなく、(5以上の)素数を扱うことにする。

さて、正方形の中心を $\theta = 360 \text{度} \div 2n$ の中心角で等分割するのであるから、何らかの方法により角度を折り出して、それを転写していくことになる。折り出しで角度を転写するときには必ず誤差が生じるので、最初に折り出す角度はそれなりの大きさを持った角にしないと全体として等分割になりにくい。たとえば11角形ならば、 $\theta \approx 16.4 \text{度}$ となるが、この程度に小さい角 θ を折り出すときにはすでに大きな誤差が発生しており、それを基準に等分割するのはかなり困難である。このような場合は、あとで示すように $3\theta \approx 49.1 \text{度}$ を折り出してそれを基準の角度とするような工夫が必要となる。

したがって、 θ の正接の値を近似できる底辺と垂辺の値の組を探すだけでなく、それに加えて θ の $(n-1)/2$ までの整数倍についても探し(11角形ならば90度を超えない最大の、 $5\theta \approx 81.8 \text{度}$ まで)、良い近似でかつ折り出しが簡便に行える数値になるものを見つきたい。

$\theta = 180 \text{度} / 11 \approx 16.4 \text{度}$ のとき、 $\tan \theta = 0.2936 \dots$ である。底辺の長さ $a = 1, 2, 3, \dots$ それぞれに対し、 $a \cdot \tan \theta$ により垂辺の長さ b を計算し、整数に近いものを探す。

a	1	2	3	4	...	17
$b = a \cdot \tan \theta$	0.2936	0.5873	0.8809	1.1745	...	4.9917

この場合、底辺17、垂辺5という直角三角形を描くことで極めて精度の高い近似が得られることになる(角度の誤差はわずか0.16%)。

これを、 2θ 、 3θ 、 4θ 、 5θ でもそれぞれ行い近似の候補を探す。また、作図では自然数の平方

根は容易に得ることができるので、底辺 a の値は自然数に限ることなく、自然数の平方根についても同様な探索をする。

この作業により、 $\tan \theta \doteq 5 / 17$, $\tan 2\theta \doteq 9 / 14$, $\tan 3\theta \doteq 15 / 13$ や $2 / \sqrt{3}$, $\tan 4\theta \doteq 46 / 21$, $\tan 5\theta \doteq 153 / 22$ や $22 / \sqrt{10}$ などの値が見つかる。あとはこれを折り出す方法を創作できればよいことになる。

4. 折り出し方の実際

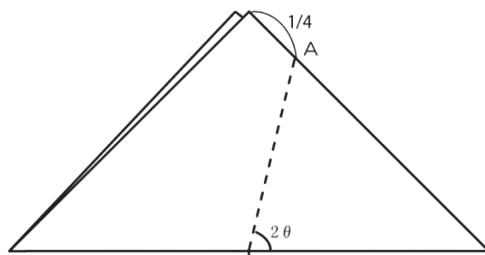
4.1 正五角形($\theta=36$ 度, $\tan 2\theta \doteq 3$)

七夕やクリスマスの飾りをつくったりする需要もあるので、正五角形や5芒星の作り方は、一般書籍にもいくつも紹介されている。

たとえば、山本2004 [8] は、近似でない18度の正弦を折り出しており、しかも5芒星を作るために切るべき場所も折り目で示されており、手順はかかるが、きわめて質の高い折り出し例である。

大原2011 [3] などでは、かなり複雑な折り出しをしているが、これは $\tan 36^\circ \doteq 5 / 7$ の近似を利用している方法である。

正五角形の折り出しをネットで検索すれば、多くのサイトがヒットするが、ほとんどが本稿と同じ $\tan 72^\circ \doteq 3$ を利用した近似折りである。実際の折り出しの方法は、たとえばいしかわ2014 [2] やセツの折り紙処 [10] で紹介されている2通りのやり方が主流のようであるが、誤差を小さくするためには、次のようにもっと工程数を少なくしたほうがいい。工程数を少なくすることは、余計な折り筋を残さずにきれいに仕上げることにもつながる。



三角半分折り、中心とAを結ぶ線で折る

fig.2 正五角形の折り出し

こうして 2θ とその反対側に 3θ が得られるわけであり、折って重なった部分からはみ出したところは中心角が θ になる。さらに、 2θ の角度を半分に折れば、180度を近似的に5分割できたことになる。正五角形を作成するなら辺に垂直に、星形ならば斜めに折る(切断する)ことで所望の図形が出来上がる。この方法と実質同じものが、小林2007 [5] などに掲載されている。次の7角形以降は、本稿が初出の折り出し方である。

4.2 正7角形 ($\theta \doteq 25.7$ 度, $\tan 2\theta \doteq 5/4$)

ユークリッド作図では作ることができないが, 折り紙作図では理論上可能な図形である。

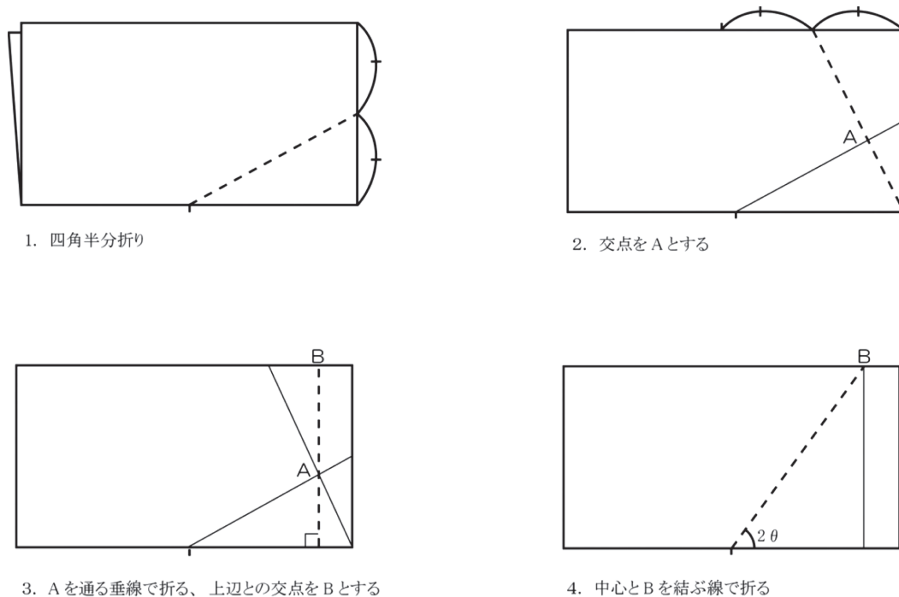


fig.3 正7角形の折り出し

4.3 正11角形 ($\theta \doteq 16.4$ 度, $\tan 3\theta \doteq 2/\sqrt{3}$)

ユークリッド作図でも折り紙作図でも作ることができない図形である。

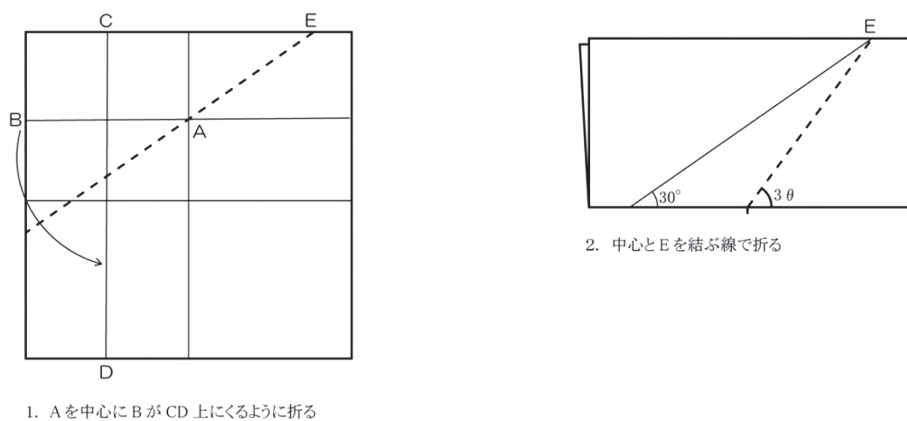
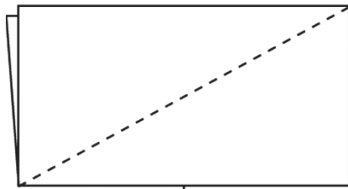


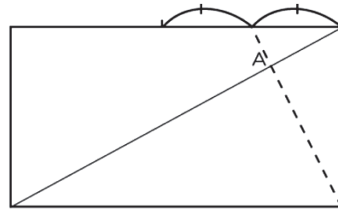
fig.4 正11角形の折り出し

4.4 正13角形($\theta \doteq 13.8$ 度, $\tan 3\theta \doteq 2/\sqrt{5}$)

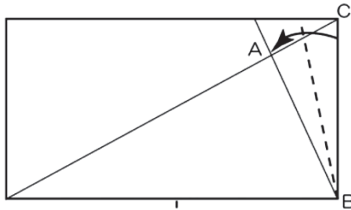
ユークリッド作図では作ることができないが、折り紙作図では理論上可能な図形である。BAからBA'への線分の移動を含む折り出しとなってしまった。



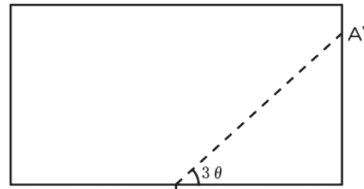
1. 四角半分折り



2. 交点をAとする



3. BCをBAに重ね、BAの長さをBCに写す

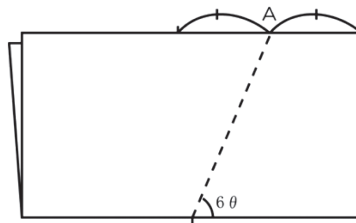


4. 中心とA'を結ぶ線で折る

fig.5 正13角形の折り出し

4.5 正17角形($\theta \doteq 10.6$ 度, $\tan 6\theta \doteq 2$)

ユークリッド作図で作れる図形である。したがって、折り紙作図も理論上可能である。非常に簡単な折り出しで実現できた。



四角半分折り、中心とAを結ぶ線で折る

fig.6 正17角形の折り出し

4.6 正19角形($\theta \doteq 9.47$ 度, $\tan 4\theta \doteq 7/9$)

ユークリッド作図では作ることができないが、折り紙作図では理論上可能な図形である。

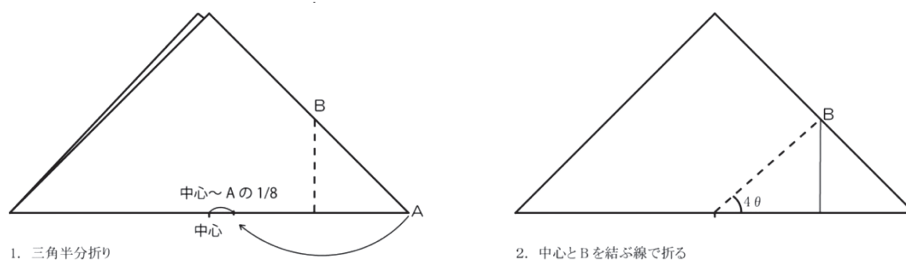


fig.7 正19角形の折り出し

5. ま と め

本稿では、360度を等分割する中心角そのものを折り出すのではなく、その整数倍の角度を基準として求めることにより、より精度の高い近似を実現できた。結果として7から19の素数に対する中心角の分割方法を提案することができた。

次表は、本稿で提案した近似の精度を総括したものである。正 n 角形を作成するための中心角 θ (真値)、近似する角度は θ の何倍にするかの値 m 、角度 $m\theta$ の正接の値(真値)、折り出しで近似した正接の値、近似した正接の値から計算される θ の近似値、その真値に対する誤差(パーセント)をまとめた。

tbl.1 正多角形の中心角の近似の結果

n	$\theta = 180/n$	m	$m\theta$	$\tan m\theta$	近似 $\tan m\theta$	近似 θ	誤差%
5	36.00	2	72.00	3.0777	3.0000	35.78	-0.60
7	25.71	2	51.43	1.2540	1.2500	25.67	-0.17
11	16.36	3	49.09	1.1541	1.1547	16.37	+0.03
13	13.85	3	41.54	0.8859	0.8944	13.94	+0.65
17	10.59	6	63.53	2.0083	2.0000	10.57	-0.15
19	9.47	4	37.89	0.7783	0.7778	9.47	-0.05

※ 近似 $\theta = \tan^{-1}(\text{近似 } \tan m\theta) / m$

誤差 = $(\text{近似 } \theta - \theta) / \theta \times 100$

いずれの角度でも、近似と真値の角度誤差は1パーセントに満たないもので、実際に行う折り出しの誤差と比較して、全く問題にならない大きさであるといえる。とくに、11角や19角では1000分の1をも下回る、極めて高精度な近似が実現できた。

本稿では、理論的に精密な近似を目指すだけでなく、十分に実用に耐えうる折り出しの提案に徹した。0度に近い角度で紙の端を直線状に折ることの現実的な困難さを意識し、しかもほんの少しの折り誤差が角度の精度に大きく影響してしまうこのような折り方を避けることが実用性を謳うためには必要なことであった。

中心角 θ を等分に折った状態から、星形を切り出すためには、中心と芒および谷までの距離を

どのように求めるかの問題が残されている。 $m=2$ の n 芒星の場合はスポーク比は θ と 2θ の余弦の比で表されることが分かっているが、実は n が大きくなると、その輪郭は星の形としてはあまり美しくなくなる。それは、 n が大きくなると、正 n 角形が円形に近づくため、2つ隣の頂点までの対角線が円周に近づき、芒の角度が単調に大きくなっていくからである。

なるべく大きい m のほうが芒は鋭い角になり、 $m=(n-1)/2$ の最大値のときに最も尖り、芒の角度は θ に等しくなる。また、普段は5芒星を見慣れているため、その芒の36度と同じくらいが安定感のある星の形ともいえよう。いずれの場合も、芒の角度を η とすると、スポーク比は $\sin(\eta/2)/\sin(\theta+\eta/2)$ になることが計算される⁽⁶⁾。今後の課題として、芒の部分のいかうまく折り出すかを考えていきたい。

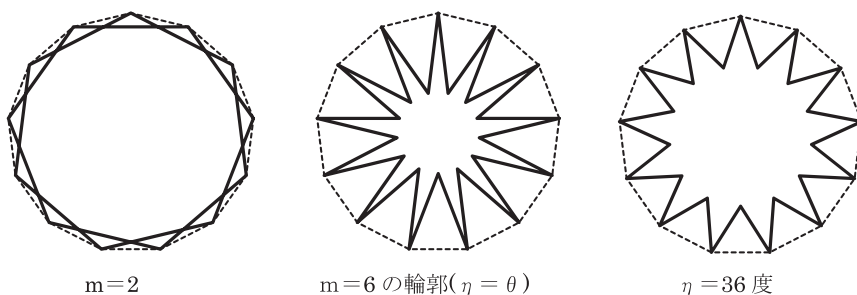


fig.8 13芒星と星形

注記

- (1) 以下、本稿では「ユークリッド作図」と称す。
- (2) 以下、本稿では「折り紙作図」の呼称を使用する。
- (3) 小林2007 [5] は児童向けの書籍であるが、「すこしむずかしいおりかた」を紹介しているページでは、「えんぴつで折る場所をかいておくと失敗がすくない。」との注意書きが施してある。折った目印だけで折り進んでいくのは実際にはとても難しいということの証左であろう。
- (4) 5芒星(ほうせい)は、正5角形の各辺を延長して他の辺の延長と交わった部分までの線分群とも定義できる。各辺を延長して外側にできた角なので、この尖端の頂点のことを芒(のぎ=植物のエイの先端にある針状の突起)という。凹んだほうの角(もとの正5角形の頂点)を本稿では谷と称す。
- (5) 星形の中心から芒までの距離に対する、中心から谷までの距離の比率をスポーク比と本稿では称す。当然、スポーク比は1未満の正数となる。
- (6) $m=2$ の n 芒星の芒の角度は $\eta=180^\circ-4\theta$ になる。スポーク比は $\sin(90^\circ-2\theta)/\sin(90^\circ-\theta)=\cos 2\theta/\cos \theta$ となる。

参考文献

- [1] 阿部亘, 折り紙による角の3等分法, 1980, 数学セミナー, 19-7, 表紙.
- [2] いしかわまりこ, 『おって! きって! かざろうきりがみ』, 2014, ポプラ社.

- [3] 大原まゆみ, 『花の立体切り紙』, 2011, 誠文堂新光社.
- [4] 川村みゆき, 三角関数を用いた任意角の折り出しの方法, 2005, 森北出版, 川崎敏和監訳 『折り紙の数理と科学』 所収, pp.162–172.
- [5] 小林一夫監修, 『親子であそぶたのしいきりがみ』, 2007, 池田書店.
- [6] 玉木英彦, 『小学生にピタゴラス』, 1994, みすず書房.
- [7] Hull, T., 『ドクター・ハルの折り紙数学教室』, 2015, 日本評論社, 羽鳥公士郎訳.
- [8] 山本厚生, 『ひと截ち折り紙—折り目あそびの魅力』, 2004, 萌文社.
- [9] Geretschläger, R., 『折り紙の数学—ユークリッドの作図法を超えて』, 2014, 森北出版, 深川英俊訳.

ウェブサイト

- [10] セツの折り紙処, origamisho.com/archives/909 (2016.8.24最終閲覧).

[2016. 9. 29 受理]

コントリビュータ：仁井 和彦 教授（現代ビジネス学科）

