安田女子大学紀要　40，375–382　2012.

構造物の確率変数が地震応答に及ぼす影響（1）
——2点推定法による確率特性値及び寄与率の推定——

中　村　誠　吾

Effect of Random Variables Included in Analytical Model on Seismic Response of Structures (1): Stochastic Characteristic and Contribution Factor Estimated by Rosenblueth Method

Seigo NAKAMURA

緒　　言

建物の地震時の挙動を調べる際によく用いられるのが，各階の質量と水平剛性とを集中質量（質点）とバネで表わした多質点振動モデルである。建物と地盤との相互作用を考慮する場合には，図1のように建物基礎部分に地盤の水平バネと回転バネを基礎に取り付けた，スウェイ・ロッキングモデル（SRモデル）が用いられる。これらのモデル諸元を決定するためには，建物に使用される構造材料の物理特性，柱・梁・壁等の構造部材の断面性能及び復元力特性の評価，支持地盤の物理特性や減衰性能の評価等が必要となる。しかしながら，これらの決定に際しては大きく2種類の曖昧さが存在する。1つは自然現象，材料や施工精度等に起因する本質的なランダム性，即ちランダム的バラツキ（不確定性）[1]であり，他の1つは諸元や現象を評価する上で解析手法やモデル化に起因するシステム的バラツキ（不確実性）[1]である。従って，建物の耐震安全性を評価するに当たっては，これらのバラツキが応答に及ぼす影響を確率論的に把握し，ランダム的バラツキについては品質管理等により，また，システム的バラツキについては解析精度の検討等によって，総合的に効果的に低減することが望ましい。

前述のような振動モデルの諸元を互いに独立な正規確率変量とし，建物の応答が弾性域である場合については一次近似二次モーメント法が有効であることを既往の研究[2),3)]で報告している。この手法では求めるべき固有値・固有ベクトルや応答量の分散が，着目している確率変数に関する偏導関数の級数として表わされるため，通常の地震応答解析プログラムを改造した専用プログラムを準備する必要がある。本稿ではこのような改造を行わずに，既成の解析プログラムをそのまま利用して固有値・固有ベクトルや応答量の特性値を求める手法について検討することを目的としている。さらに，各確率変量のバラツキが，応答量に与える影響度を推定する方法についても提案する。なお，本報で提案した手法に基づく数値計算例は，次報で報告する。

1．評価手法の選定

システム工学の分野において信頼性評価に用いられる代表的な手法としては，

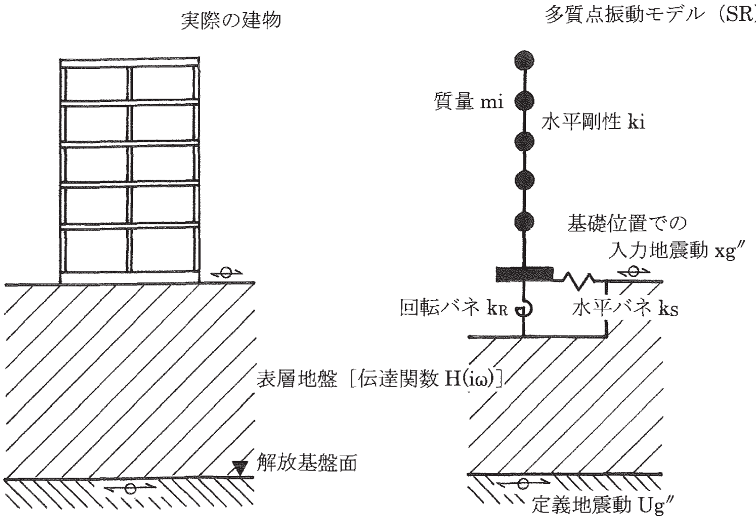

図１　多質点振動モデル（SR モデル）

① 数値積分法
② 一次近似二次モーメント法（FOSM 法/First-Order Second-Moment Method）[4)]
③ モンテカルロ法
④ 2 点推定法（Rosenblueth Method）[5)]

が挙げられる。これら 4 手法を比較したのが，表 1 である。複数個の確率変数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の関数 $g(\mathbf{X})$ が陽な形で表わされる場合には，$g(\mathbf{X})$ の期待値 $E[g(\mathbf{X})]$ 及び分散 $Var[g(\mathbf{X})]$ を①及び②で算出するのが有効であるが，実際は関数自体が不明または Taylor 展開を行うのが困難といった問題が多く，現実的な手法として③または④が用いられる。なお，③のモンテカルロ法では通常非常に多くの計算回数を行う必要があるため，本稿では比較的少ない計算回数で $g(\mathbf{X})$ の期待値及び分散の近似値が得られる，④を採用することとする。

表１　確率変数から成る関数の評価手法

	手　　法	手法の概要	必要な情報	備　　考
①	数値積分法	各変数 Xi の確率密度関数を用いて多重数値積分を行うことにより，特性値を算出	同時確率密度関数	同時確率密度関数を正確に知ることが困難，多重積分が現実的には不可能等の問題がある。
②	一次近似二次モーメント法	評価関数を各変数 Xi の期待値まわりで Taylor 展開して線形近似を行うことにより，期待値と分散とを算出	各変数の期待値と分散	評価関数が不明，または複雑な場合には偏微分ができず，従って Taylor 展開が行えない。
③	モンテカルロ法	各変数 Xi について分布形を満足する乱数を発生させて数値シミュレーションを行い，それらの結果から特性値を算出	各変数の分布形	極端な近似や単純化を行うことなく解が得られるが，必要とされる計算回数が多く，手間がかかる。
④	点推定法（Rosenblueth の 2 点推定法）	各変数 Xi を代表する数個の離散値とその集中確率密度によって，期待値と分散等を算出	各変数の期待値と分散（場合により，ひずみ度）	評価関数が複雑で偏微分不可能な場合でも，比較的少ない計算回数で解が得られる。

2． 多質点振動系の固有値及び応答値の特性値

2.1 多質点系の固有値問題

地震動 xg″ 受ける多質点振動系の運動方程式は，次式で表わされる。

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' + \mathbf{C}\mathbf{x}' + \mathbf{K}\mathbf{x} = -xg''\ \mathbf{M}\mathbf{1} \tag{1}$$

ここに，**M**：質量マトリックス

C：減衰マトリックス

K：剛性マトリックス

x(t)：基礎に対する各質点の変位ベクトル（相対変位）

1：単位列ベクトル

xg″ (t)：入力地震動の加速度波形

t：時間

$(\ )'' = d^2(\ )/dt^2,\ (\ )' = d(\ )\ /\ dt$

振動系の固有値を求めるための，上式に対応する非減衰の自由振動方程式は，

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \tag{2}$$

となる。ここで，変位ベクトル **x** を固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}$ を用いて，

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} \cdot \exp\ (i\ \omega\ t) \tag{3}$$

で表わせば，

$$(\mathbf{M} - 1\ /\ \omega^2\ \mathbf{K})\ \boldsymbol{\phi} = 0 \tag{4}$$

を得る。(4) 式が意味ある解を有するため，即ち，$\boldsymbol{\phi} \neq \mathbf{0}$ であるためには，

$$\det\ |\ \mathbf{M} - 1/\ \omega^2\ \mathbf{K}\ | = 0 \tag{5}$$

であるから，これより各次数の固有値 ω_j が，次いで固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_j$ が求まる。

2.2 多質点系の地震応答

地震応答解析を時刻歴モーダル法に従って記述する。変位ベクトル **x** をモードマトリックス $\boldsymbol{\phi}$ と時刻関数 **q** の積，即ち，

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}\mathbf{q} \tag{6}$$

但し，$\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1\ \boldsymbol{\phi}_2 \cdots\ \boldsymbol{\phi}_n]$

$\boldsymbol{\phi}_j$：j 次の固有ベクトル（列ベクトル）

n：振動系の全自由度数

で表わせば，(1) 式は次式のようになる。

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}\mathbf{q}'' + \mathbf{C}\boldsymbol{\phi}\mathbf{q}' + \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}\mathbf{q} = -xg''\ \mathbf{M}\mathbf{1} \tag{7}$$

この両辺各項の前方から転置 $\boldsymbol{\phi}^t$ を乗じて，さらに，

$$\begin{aligned}
M_j &= \boldsymbol{\phi}_j^t \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j &&：\text{j 次の広義の質量} \\
C_j &= \boldsymbol{\phi}_j^t \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_j &&：\text{j 次の広義の減衰係数} \quad （\text{但し，} j = 1, 2, \cdots, n） \\
K_j &= \boldsymbol{\phi}_j^t \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j &&：\text{j 次の広義のバネ定数} \\
\beta_j &= \boldsymbol{\phi}_j^t \mathbf{M}\mathbf{1}\ /\ M_j &&：\text{j 次の刺激係数}
\end{aligned} \tag{8}$$

なる関係を導入して整理すれば，j 次モードの運動方程式として次式を得る。

$$q_j'' + 2h_j\ \omega_j q_j' + \omega_j^2 q_j = -\beta_j xg'' \tag{9}$$

上式の解析解は，インパルス応答の解に Duhamel 積分を適用することにより，以下のように

求めることができる。

$$q_j = q_{j0}\,\beta_j \qquad (但し，j=1,2,\cdots,n) \qquad (10\cdot a)$$

$$q_{j0} = -[(1-h_j^2)^{1/2}\,\omega_j]^{-1}\int_0^t xg''(\tau)\exp[-h_j\,\omega_j(t-\tau)]\times\sin[(1-h_j^2)^{1/2}\,\omega_j(t-\tau)]d\tau \qquad (10\cdot b)$$

以上により，最終的な変位応答は各次の総和として次式で表わされる。

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}\,\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\phi}_j\,q_j = \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\phi}_j\,\beta_j\,q_{j0} \qquad (11)$$

また，速度応答と絶対加速度応答も同様にして次式で表わされる。

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\phi}_j\,\beta_j q_{j0}' \qquad (12)$$

$$\mathbf{x}'' + xg''\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\phi}_j\,\beta_j\{q_{j0}'' + xg''\} \qquad (13)$$

2．3　2点推定法による固有値及び応答値の特性値推定

確率変数 X の値を 2 つの離散値 X_+，X_- で，また，これらに対応する集中確率密度を P_+，P_- で表わす（図 2 参照）とき，X_+, X_-，P_+，P_- が確率密度関数 $f_x(x)$ を満足する条件は，

$$\begin{aligned} &P_- + P_+ = 1\\ &P_-\cdot X_- + P_+\cdot X_+ = \mu_X\\ &P_-(X-\mu_X)^2 + P_+(X_+-\mu_X)^2 = \sigma_X^2\\ &P_-(X-\mu_X)^3 + P_+(X_+-\mu_X)^3 = \theta_X^3\cdot\sigma_X^3 \end{aligned} \qquad (14)$$

但し，$\mu_X = E[X]$：確率変数 X の期待値

$\sigma_X^2 = Var[X]$：確率変数 X の分散

$\theta_X = E[(X-\mu_X)^3]/\sigma_X^3$：確率変数 X のひずみ度

であり，これらを解くと

$$\begin{aligned} &P_+ = \{1\pm[1-1/(1+(\theta_X/2)^2)]^{1/2}\}/2\\ &P_- = 1-P_+\\ &X_\pm = \mu_X \pm \sigma_X(P_\pm/P_\mp)^{1/2} \end{aligned} \qquad (15)$$

となる。特に，変数 X が正規確率変数であれば $\theta_x = 0$ となり

$$\begin{aligned} &P_+ = P_- = 1/2\\ &X_\pm = \mu_X \pm \sigma_X \end{aligned} \qquad (16)$$

なる簡単な関係が得られるから，1 変数関数 g(X) の期待値と分散は

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx\\ &= P_+\,g(X_+) + P_-\,g(X_-)\\ &= \{g(\mu_X+\sigma_X) + g(\mu_X-\sigma_X)\}/2\\ Var[g(X)] &= E[g^2(X)] - \{E[g(X)]\}^2 \end{aligned} \qquad (17)$$

によって求められる。

以上の結果を s 個の独立な正規確率変数（$X_1, X_2, \cdots, X_s$）からなる関数 $z = g(X_1, X_2, \cdots, X_s)$ に拡張する。変数 X_i の期待値と分散をそれぞれ μ_{Xi} と σ_{Xi} で表わせば，関数 z の期待値と分散は次式により求めることができる。

$$E[z] = 2^{-s}[g(++\cdots+) + g(-+\cdots+) + \cdots + g(--\cdots-)] \qquad (18)$$

$$Var[z] = 2^{-s}[\{g(++\cdots+)\}^2 + \{g(-+\cdots+)\}^2 + \cdots + \{g(---\cdots-)\}^2] \qquad (19)$$

ここで，$g(++\cdots+) = g(\mu_{X1}+\sigma_{X1}, \mu_{X2}+\sigma_{X2}, \cdots, \mu_{Xs}+\sigma_{Xs})$

$g(-+\cdots+) = g(\mu_{X1}-\sigma_{X1}, \mu_{X2}+\sigma_{X2}, \cdots, \mu_{Xs}+\sigma_{Xs})$

……

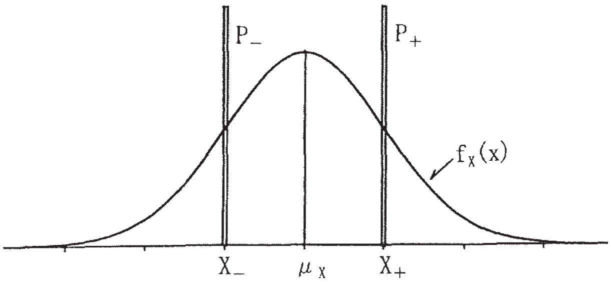

図2　確率密度関数 f_x (x) の離散化

$$g(--\cdots-)=g(\mu_{X1}-\sigma_{X1},\ \mu_{X2}-\sigma_{X2},\ \cdots,\ \mu_{Xs}-\sigma_{Xs})$$

固有値・固有ベクトルや応答値の期待値と分散は，振動モデルの諸元が確率変数 X_i に対応すると考えることにより，2^s 回の固有値解析または応答解析から求め得ることになる。

3．各確率変量が応答に及ぼす寄与率の推定

前節で固有対である固有値及び固有ベクトル，そして応答値の期待値と分散が求まったことになるが，ここでは各確率変量がこれらの分散にどの程度寄与しているか，その寄与率を線形重回帰モデルと一次近似法とによって推定する方法について述べる。

3.1　線形重回帰モデルと寄与率

説明変数を X_i，目的関数を Y，また偏回帰係数を a_i で表わすときの線形重回帰モデルは，次式で表わされる。

$$Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_mX_m \tag{20}$$

このモデルは，偏回帰係数 a_i に関して線形性を要求するのみである。

いま，Y 及び X_i に関して N 個の観測値が得られているものとし，これらを

$$Y=\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_N\}$$
$$X_i=\{x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{iN}\}\qquad (\text{但し，}i=1,2,\cdots,m) \tag{21}$$

で，また，Y を X_i から予測する関数を f，誤差を ε_i で表わすものとすれば，

$$Y=f(X_i)+\varepsilon_i \tag{22}$$

これを X_i の期待値 μ_{Xi} のまわりで Taylor 展開すれば，以下のようになる。

$$Y=f(\mu_{X1},\ \mu_{X2},\ \cdots,\ \mu_{Xm})+\Sigma^{m}_{i=1}(X_i-\mu_{Xi})\ \partial f/\partial X_i\,|_{\mu X*}$$
$$+\Sigma^{m}_{i=1}\Sigma^{m}_{j=1}(X_i-\mu_{Xi})(X_j-\mu_{Xj})\ \partial^2 f/\partial X_i\ \partial X_j\,|_{\mu X*}+\cdots \tag{23}$$

ここで，$\mu_{X*}=(\mu_{X1},\ \mu_{X2},\ \cdots,\ \mu_{Xm})$

いま，(23) 式に一次近似法を適用して，右辺の１次の項までで Y を近似すれば，Y の期待値として次式を得る。

$$E(Y)=E[f(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m)]$$
$$=f(\mu_{X1},\ \mu_{X2},\ \cdots,\ \mu_{Xm})+\Sigma^{m}_{i=1}\ \partial f/\partial X_i\,|_{\mu X*}\cdot E(X_i-\mu_{Xi})$$
$$=f(\mu_{X1},\ \mu_{X2},\ \cdots,\ \mu_{Xm}) \tag{24}$$

同様にして Y の分散は，次式で表わされる。

$$\mathrm{Var}(Y) = \Sigma^{m}_{i=1}\Sigma^{m}_{j=1}\,\partial f/\partial X_i\,|_{\mu X*}\cdot\partial f/\partial X_j\,|_{\mu X*}\cdot\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= \Sigma^{m}_{i=1}(\partial f/\partial X_i\,|_{\mu X*})^2\cdot\mathrm{Var}(X_i) \qquad (25)$$

従って，各説明変数 X_i が目的変数の分散 Var (Y) に占める寄与率 γ_i は，次式によって定義できる。

$$\gamma_i = [(\partial f/\partial X_i\,|_{\mu X*})^2\cdot\mathrm{Var}(X_i)]\,/\,\mathrm{Var}(Y) \qquad (26)$$

3.2　固有対及び応答値の分散に占める各確率変量の寄与率

多質点 SR モデルの確率変量は，質点質量，部材の断面性能，構造材料定数，地盤～建物相互作用バネ，地盤～建物間減衰係数，入力地震動の最大加速度振幅の 6 種類に大別される。いま，これらがそれぞれ X_1, X_2, …, X_6 に対応するものとし，重回帰モデル f としては，

$$f = f(X_1, X_2, \cdots, X_6)$$
$$= a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 + a_6X_6 + a_7X_1X_2 + a_8X_1X_3 + a_9X_1X_4 + a_{10}X_1X_5$$
$$+ a_{11}X_2X_3 + a_{12}X_2X_4 + a_{13}X_2X_5 + a_{14}X_3X_4 + a_{15}X_3X_5 + a_{16}X_4X_5 \qquad (27)$$

なる形を設定すれば，期待値 $\mu_{X*} = (\mu_{X1}, \mu_{X2}, \cdots, \mu_{X6})$ における f の偏微係数は，

$$\partial f/\partial X_1\,|_{\mu X*} = a_1 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$
$$\partial f/\partial X_2\,|_{\mu X*} = a_2 + a_7 + a_{11} + a_{12} + a_{13}$$
$$\partial f/\partial X_3\,|_{\mu X*} = a_3 + a_8 + a_{11} + a_{14} + a_{16} \qquad (28)$$
$$\partial f/\partial X_4\,|_{\mu X*} = a_4 + a_9 + a_{12} + a_{14} + a_{16}$$
$$\partial f/\partial X_5\,|_{\mu X*} = a_5 + a_{10} + a_{13} + a_{15} + a_{16}$$
$$\partial f/\partial X_6\,|_{\mu X*} = a_6$$

となる。

以上により，2 点推定法に基づいて固有値解析または応答解析を行った中から，16ケースを抽出して（27）式の a_1, a_2, …, a_{16} を決定し，これらを（28）式に代入して偏微係数が求められるから，振動モデルの確率変量が固有対または応答値の変動に及ぼす寄与率は（26）式によって推測できることになる。

4．結　　語

本稿では，建物の振動モデル諸元を確率変数と考えた時の固有対及び応答値の変動を求めるため，通常の地震応答解析プログラムを用いて 2 点推定法により算定する，比較的簡便な手法について述べた。次に，これらの各確率変数が固有対や応答値の変動に与える影響度を寄与率として定義し，これを推定する方法についても提案した。特に，応答値に対する寄与率が判明すれば，高い値を占める確率変数のバラツキの極小化に向けた効率的な取り組みが期待できるものと思われる。今後は，これらの提案手法の妥当性について，具体的な数値解析例によって検討を行うつもりである。

参 考 文 献

1） Kennedy R. P., et al“Probabilistic Seismic Safety Study of an Existing Nuclear Power Plant”Nucl. Engrg. Des.59, 1980, 315-338

2）　中村誠吾他「原子力発電所建屋の地震 PRA に関する研究〜振動系の確率変数が応答に及ぼす影響」確率論的安全性評価に関する国内シンポジウム論文集，1986，85–90
3）　中村誠吾他「原子力発電所建屋の地震 PRA に関する研究〜応答係数評価における感度解析手法の検討」日本建築学会大会学術講演梗概集，1987，105–106
4）　Ang A. H–S., Tang W. H.（伊藤　學・亀田弘行　共訳）「土木・建築のための確率・統計の基礎」丸善，1977，168-169 及び 194–198
5）　Rosenblueth E.“Two-point estimate in probabilities”Appl. Math. Modeling, Vol.5, 1980, 329–335

付録：入力地震動の最大加速度振幅を確率変数と考える場合の扱いについて

地震応答に最も大きな影響を及ぼすのは，入力地震動そのものであることは従来の多くの解析結果を総括すれば明らかである。現在では，過去の地震観測記録を分析して，

①　地震動の最大振幅
②　地震動の周波数特性
③　地震動の継続時間及び振幅包絡線の経時的変化

に関する多くの知見が得られており，模擬地震波の作成にも役立てられている。しかし，地震そのものが非再現性の現象であることもあり，本稿では議論を単純化するために最大加速度振幅のみを確率変数として扱った。

A. 1　入力と応答（出力）間の確率特性値

1つの線形確定構造系に，最大加速度振幅を正規確率変数とする地震動を入力する場合を考える。入力地震動の振幅のみが確率変数であり，波形（周期成分及び位相）自体は不変であるから，最大振幅が期待値 $\underline{xg_0}''$ の α 倍になったときの応答は，系に $\underline{xg_0}''$ を入力するときの応答 $\underline{R}_0$ の α 倍となり，単純な線形変換を行うことによって得られる。なお，入力 $\underline{xg_0}''=0$ のときに応答 $\underline{R}_0=0$ とならなければならないから，この線形変換は定数項を含まないことになる。

ここで，確率密度関数が $f_X(x)$ なる確率変数 X の関数 Y を $Y=g(X)$ で定義し，この逆関数 $X=g^{-1}(Y)$ が一義的に決定され，かつ，存在するものとすれば，Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ は，

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\cdot|dg^{-1}(y)/dy| \qquad \text{(a–1)}$$

で与えられる[4)]。従って，Y が X の線形変換 $Y=\alpha X$ で表わされる場合については，

$$x=y/\alpha=g^{-1}(y)$$
$$dg^{-1}(y)/dy=1/\alpha$$
$$\mu_Y=\alpha\cdot\mu_X \qquad \text{(a–2)}$$

となるから，

$$f_Y(y)=f_X(y/\alpha)/\alpha \qquad \text{(a–3)}$$
$$E[Y]=\alpha\cdot\mu_X$$

を得る。さらに，X が $N(\mu_X,\sigma_X)$ なる正規確率変数であれば，

$$f_X(x)=\exp\{-[(x-\mu_X)/\sigma_X]^2/2\}/(\sigma_X\sqrt{2\pi}) \qquad \text{(a–4)}$$

であるから，これを (a–3) 式に代入すれば，

$$f_Y(y)=\exp\{-[(y/\alpha-\mu_x)/\sigma_X]^2/2\}/(\sigma_X\sqrt{2\pi})/\alpha$$
$$=\exp\{-[(y-\mu_Y)/\sigma_Y]^2/2\}/(\sigma_Y\sqrt{2\pi})$$

となるから，結局，Y の期待値，分散及び変動係数 ν_Y として次式を得る。

$E[Y] = \mu_Y = \alpha \cdot \mu_X$

$Var[Y] = \sigma_Y^2 = \alpha^2 \cdot \sigma_X^2$

$\therefore\ \nu_Y = (Var[Y])^{1/2} / E[Y] = \sigma_X / \mu_X = \nu_X$

以上により，応答の期待値と標準偏差は，それぞれ入力のそれらのα倍となり，また，変動係数は入力と応答とで不変であることがわかる。

A. 2　重回帰モデル f の設定

確率変量が 6 個の場合，重回帰モデルの項数としては，

$[n + {}_nC_r]\ |_{(n=6,\, r=2)} = \{n + n!/[r!\,(n-r)!]\}\ |_{(n=6,\, r=2)} = 6 + 15 = 21$

即ち，21項で設定するのが普通である。しかし，本稿で X_6 は入力地震動の最大加速度を対応させており，A. 1 により入力～出力間で 1 対 1 対応となるため，X_iX_6 $(i = 1, 2, \cdots, 5)$ の 5 項を差し引いた16項で設定している。

［2011. 9. 29　受理］